



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Introduktion til elementmetoden for plane bjælke- og rammekonstruktioner

Mortensen, Niels Lambert

Publication date:
1999

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Mortensen, N. L. (1999). *Introduktion til elementmetoden for plane bjælke- og rammekonstruktioner*. Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University. U/ Bind U9910

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- ? Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- ? You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- ? You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING
AALBORG UNIVERSITET • AAU • AALBORG • DANMARK

N. LAMBERT MORTENSEN

INTRODUKTION TIL ELEMENTMETODEN FOR PLANE BJÆLKE- OG
RAMMEKONSTRUKTIONER. REVIDERET UDGAVE

SEPTEMBER 1999

ISSN 1395-8232 U9910

Forord

Nærværende kompendium blev udarbejdet i efteråret 1997 i forbindelse med undervisningen i matrixmetoden, som udgør den sidste tredjedel (5 mini moduler) af kurset Grundlæggende statik og styrkelære I på B-sektorens 3. semester.

Da det er tidligt i studieforløbet, at elementmetoden introduceres, er det tilstræbt at gøre fremstillingen enkel.

Der indledes med simple endimensionale konstruktioner opbygget af fjederelementer. Dernæst følger todimensionale konstruktioner opbygget af stangelementer, og til sidst todimensionale konstruktioner opbygget af bjælkeelementer. Der gives en kort introduktion til elementmetodeprogrammet CALFEM, som anvendes i forbindelse med opgaveregning. Programmet benyttes også i projektarbejdet.

CALFEM er et interaktivt computerprogram udarbejdet på Lunds Tekniske Universitet. Det er en Toolbox til Matlab beskrevet i manualen CALFEM, A finite element toolbox to Matlab af Division of Structural Mechanics and Department of Solid Mechanics. LTH, Lund University.

En mere udførlig introduktion til elementmetoden end givet i dette kompendium findes f.eks. i Konstruktionsberäkningar med dator af Sven Thelandersson.

Indholdsfortegnelse

1. Introduktion	1
2. Et endimensionalt system af elastiske fjedre	2
2.1 Håndregning	2
2.2 Systematisering af beregninger med henblik på edb	4
3. Plane gitterkonstruktioner	14
3.1 Generelt	14
3.2 Elementets stivhedsrelation i lokale koordinater	16
3.3 Elementets stivhedsrelation i globale koordinater	18
3.4 Konstruktionens stivhedsrelation	23
3.4.1 Konstruktionens topologi. Sammenkobling af konstruktionens elementer	23
3.4.2 Opstilling af konstruktionens stivhedsrelation	25
3.4.3 Eksempel	25
4. Plane bjælke- og rammekonstruktioner	33
4.1 Generelt	33
4.2 Elementstivhedsrelationen i lokale koordinater	34
4.3 Elementstivhedsrelationen i globale koordinater	35
4.4 Konstruktionens stivhedsrelation	36
4.4.1 Generelt	36
4.5 Eksempel. Plan ramme	37
4.6 Konstruktioner med charnier	49

Symbolliste

f	Kraftvektor, ydre kræfter i konstruktionens knuder
a	Flytningsvektor, flytninger af konstruktionens knuder
K	Konstruktionens stivhedsmatrix
G	Transformationsmatrix
$f_i^e(f_i^{e'})$	Elementkraftvektor for element nr. i
$f_i^{ee}(f_i^{ee'})$	Ekspanderet elementkraftvektor
$f_i^{0e}(f_i^{0e'})$	Elementlastvektor for element nr. i
f_i^{0ee}	Ekspanderet elementlastvektor
$a_i^e(a_i^{e'})$	Elementknudeflytningsvektor for element nr. i
$K_i^e(K_i^{e'})$	Stivhedsmatrix for element nr. i
K_i^{ee}	Ekspanderet stivhedsmatrix

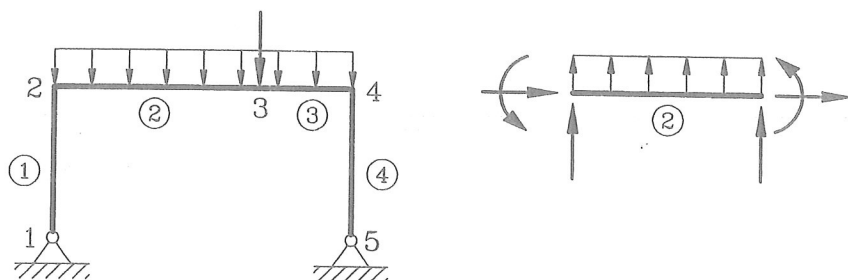
Indekser (jfr. anvendelserne ovenfor)

e	Element eller ekspanderet
$'$	Lokalt koordinatsystem

1. Introduktion til elementmetoden

I det følgende vil vi beskæftige os med beregning af plane gitter- og bjælkesystemer ved hjælp af elementmetoden.

Formålet med beregningerne er at bestemme flytninger, reaktioner og snitkræfter. Elementmetoden (eller stivhedsmatrixmetoden) er udviklet med henblik på anvendelse af edb, derfor er beregningsgangen systematiseret.



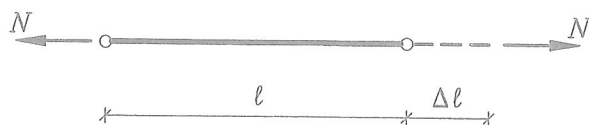
Figur 1.1. Rammekonstruktion opbygget af bjælkeelementer.

I dette kursus behandles plane gitterkonstruktioner opbygget af stangelementer og plane bjælke- og rammekonstruktioner opbygget af bjælkeelementer. Først behandles dog et simpelt tilfælde, nemlig en endimensionel konstruktion opbygget af elastiske fjederelementer.

Det er karakteristisk for elementmetoden, at fremgangsmåden er den samme for alle konstruktionstyper.

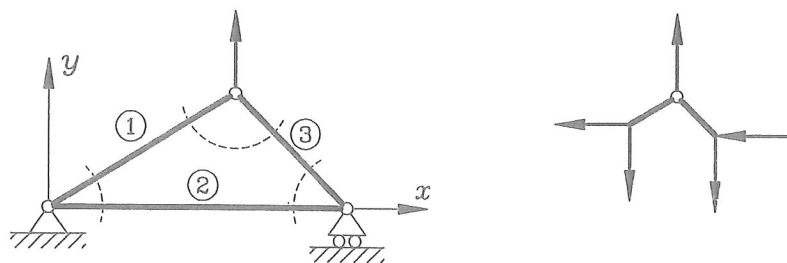
Beregningsgangen kan kort opdeles i følgende trin:

1. Elementstivhedsrelationerne for hvert enkelt element i konstruktionen opstilles. Dvs. at man beskriver sammenhængen mellem flytningerne af elementets endepunkter, knuderne og de tilhørende kræfter i knuderne. For at kunne opstille denne sammenhæng skal man kende materialeegenskaberne. I dette kursus vil vi kun beskæftige os med materialer, som følger Hooks lov (lineært elastiske materialer). Elementstivhedsrelationerne sikrer ligevægt af de enkelte elementer.



Figur 1.2. Stangelement.

2. Konstruktionens knuder fritskæres (som i knudepunktsmetoden i en gitterkonstruktion).



Figur 1.3. Gitterkonstruktion opbygget af stangelementer.

Ligevægtsligningerne opstilles for alle knuder påvirket af ydre kræfter og elementkræfter (snitkræfter), og konstruktionens stivhedsrelation kan nu opstilles. I stivhedsrelationen indgår de ubekendte knuddeflytninger og reaktioner samt de ydre kræfter. Når både elementer og knuder er i ligevægt, er konstruktionen i ligevægt.

3. Randbetingelserne indføres i konstruktionens stivhedsrelation, og ligningerne løses m.h.t. de ukendte knuddeflytninger og reaktioner.
4. Snitkræfterne beregnes nu i alle elementer v.h.a. elementernes stivhedsrelationer og de fundne knuddeflytninger.

Elementmetodens styrke er, at fremgangsmåden beskrevet ovenfor er ens for alle konstruktionstyper. Den er altså ikke kun gyldig for gitter- og bjælkesystemer, men også for skive-, skal- og pladekonstruktioner.

Det er dog mere kompliceret at opstille elementstivhedsrelationerne for de sidstnævnte konstruktionstyper.

2. Et endimensionalt system af elastiske fjedre

I dette afsnit illustreres elementmetoden på et simpelt endimensionalt system bestående af forbundne elastiske fjedre.

Der indledes dog med at illustrere, hvordan problemet løses ved almindelig "håndregning".

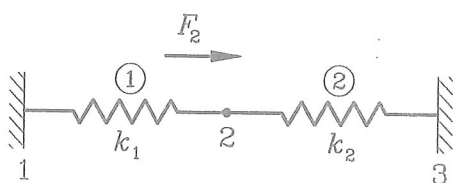
Derefter systematiseres beregningerne i overensstemmelse med elementmetoden.

2.1 "Håndregning"

Vi betragter en fjederkonstruktion opbygget af 2 elastiske fjedre i serie.

Opgave: Bestem fjederkræfterne.

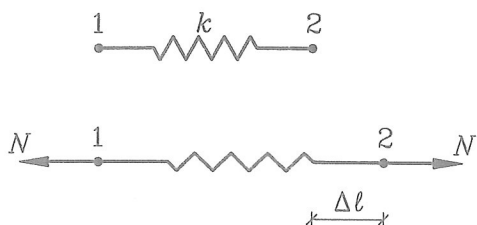
Givet: Fjederkonstanter k_1 og k_2 . Ydre kraft F_2 , understøtningsforhold jfr. figur 2.1.



Figur 2.1. Fjederkonstruktion.

Figuren viser de to fjedre ① og ②, som er forbundet i punkt 2 og fastholdt i understøtningerne 1 og 3. Den ydre last virker i punkt 2 i fjedrenes længderetning.

Først betragtes en vilkårlig elastisk fjeder med fjederkonstanten k . Endepunkterne (knuderne) nummereres 1 og 2.



Figur 2.2.

Som bekendt gælder, at

$$N = k \cdot \Delta l \quad (2.1)$$

hvor N regnes positiv som træk og Δl positiv som forlængelse.

(2.1) er en konstitutiv ligning (fysisk betingelse).

Tilbage til konstruktionen:

For element ① :

$$N_1 = k_1 \cdot \Delta l_1 \quad (2.2)$$

For element ② :

$$N_2 = k_2 \cdot \Delta l_2 \quad (2.3)$$

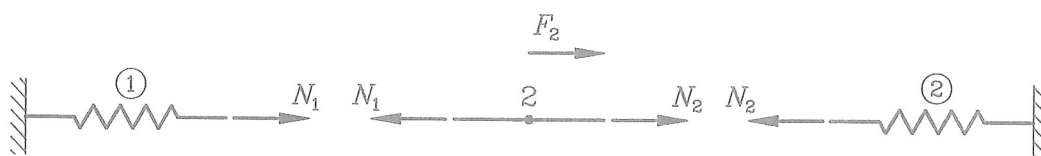
Da fjedrene er forbundet i 2, er

$$\Delta l_1 = -\Delta l_2 \quad (2.4)$$

(2.4) er en kompatibilitetsbetingelse.

Da konstruktionen skal være i ligevægt, skal knude 2 være i ligevægt.

Knuden skæres løs, og snit(fjeder)kræfter og ydre last påføres.



Figur 2.3. Knude 2 fritskæres.

Ligevægt af knude 2 kræver:

$$F_2 - N_1 + N_2 = 0 \quad (2.5)$$

Ved anvendelse af de konstitutive ligninger og kompatibilitetsbetingelsen fås

$$F_2 - k_1 \cdot \Delta l_1 - k_2 \cdot \Delta l_1 = 0 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{F_2}{k_1 + k_2} \quad (2.6)$$

Vi har nu fundet forlængelsen af element ① (= forkortelsen af element ②), eller med andre ord flytningen af punkt 2 mod højre, da punkt 1 er fastholdt.

For $F_2 = 3 \text{ kN}$, $k_1 = 100$, $k_2 = 200 \text{ [kN/m]}$ fås f.eks.:

$$\Delta l_1 = \frac{3}{100 + 200} = \frac{3}{300} = 0.01 \text{ m}$$

Da flytningen af knude 2 nu kendes, kan fjederkræfterne N_1 og N_2 findes ved anvendelse af elementernes stivhedsrelationer (2.2) og (2.3)

$$N_1 = k_1 \cdot \Delta l_1 = k_1 \cdot \frac{F_2}{k_1 + k_2} = 100 \cdot \frac{3}{300} = 1 \text{ kN}$$

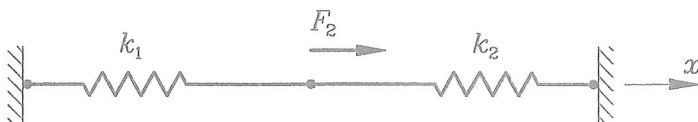
$$N_2 = k_2 \cdot \Delta l_2 = -k_2 \cdot \Delta l_1 = 200 \cdot \left(-\frac{3}{300}\right) = -2 \text{ kN}$$



Figur 2.4. Konstruktionen er i ligevægt.

2.2 Systematisering af beregningsgangen med henblik på anvendelse af edb

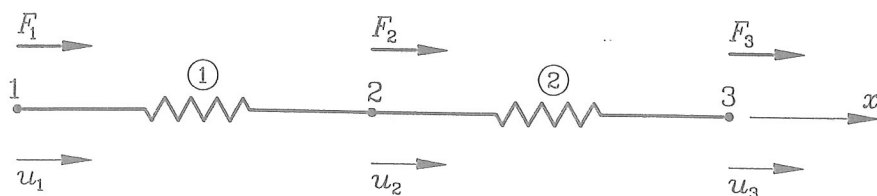
Den endimensionale "konstruktion" bestående af to fjedre i forlængelse af hinanden betragtes igen. Fjederkonstanterne er k_1 og k_2 (N/mm). Konstruktionen påvirkes af den ydre kraft F_2 .



Figur 2.5. Den givne konstruktion.

Frit legeme diagram

I et frit legeme diagram vises elementnummerering (to elementer), knudenummerering samt ydre kræfter og knudeflytninger.



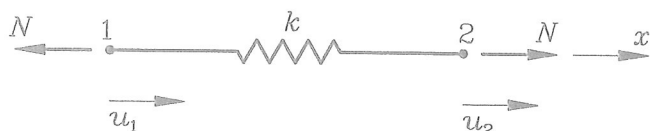
Figur 2.6. Frit legeme diagram med ydre kræfter og knudeflytninger.

De ydre kræfter F_1 , F_2 og F_3 angriber i knuderne. F_2 er kendt, F_1 og F_3 er ukendte reaktioner.

Knudeflytningerne u_1 , u_2 og u_3 regnes ligesom de ydre kræfter positive i x-aksens positive retning. u_1 og u_3 er kendte (begge lig med 0), u_2 er ukendt.

Elementstivhedsrelationen for en vilkårlig lineærelastisk fjeder

Elementstivhedsrelationen for en vilkårlig lineærelastisk fjeder med fjederkonstanten k opstilles. Udtrykket benyttes til at opstille stivhedsrelationerne for de to fjedre, som indgår i konstruktionen. Knuder og flytninger nummereres 1 og 2, jfr. fig. 2.7 (lokal nummerering). Elementet orienteres fra 1 mod 2 (lokal x-akse).



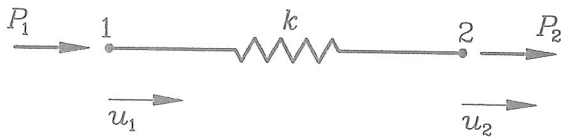
Figur 2.7. Lineærelastisk fjeder.

Stivhedsrelationen udtrykker sammenhængen mellem fjederkraften N og længdeændringen af fjederen udtrykt ved forskellen mellem de to knudeflytninger u_1 og u_2 . Idet N regnes positiv som træk (som i en gitterstang), fås for en stang i ligevægt sammenhængen mellem fjederkraften og knudeflytningerne

$$N = k \cdot (u_2 - u_1) \quad (2.7)$$

(2.7) kaldes en konstitutiv ligning.

Fjederkraften N erstattes nu af elementkræfterne P_1 og P_2 virkende i elementets knuder 1 og 2. Elementkræfterne regnes begge positive i x-aksens positive retning til forskel fra N , som regnes positiv i modsatte retninger. Formålet med at indføre elementkræfterne er netop at systematisere beregningerne ved konsekvent at regne kræfterne positive i den positive akseretning.



Figur 2.8. Lineærelastisk fjeder.

Ved sammenligning af figur 2.7 og 2.8 ses, at

$$N = -P_1 = P_2 \quad (2.8)$$

Af (2.7) fås derfor

$$P_2 = k(u_2 - u_1) \quad (2.9)$$

$$P_1 = -k(u_2 - u_1) \quad (2.10)$$

Det ses, at

$$P_1 + P_2 = 0 \quad (2.11)$$

Summen af elementkræfterne virkende på et element er lig med nul (ligevægt).

(2.9) giver sammenhængen mellem flytningerne af elementknudepunkterne og elementkraften P_2 i lokalknude 2.

(2.10) Tilsvarende giver (2.10) sammenhængen mellem de samme flytninger (u_1 og u_2) og elementkraften P_1 i lokalknude 1.

Hvis vi kombinerer de to, får vi elementstivhedsrelationen for et fjederelement

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

På kort form:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e \quad (2.13)$$

\mathbf{f}^e elementkraftvektor

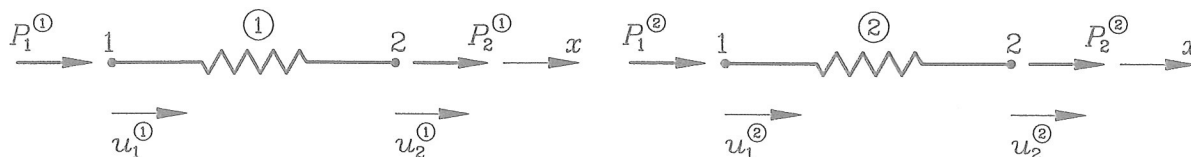
\mathbf{K}^e elementstivhedsmatrix

\mathbf{a}^e knudelflytningsvektor for elementet

Elementstivhedsrelationen (2.12), (2.13) beskriver sammenhængen mellem elementflytningerne og elementkræfterne i elementets knuder. Den gælder generelt for lineærelastiske fjedre.

Herefter opstilles elementstivhedsrelationerne for de to elementer i den aktuelle konstruktion.

Elementstivhedsrelationerne for konstruktionens elementer



Figur 2.9. Elementer med elementkræfter og knudeflytninger.

(Øverste index på elementkræfter og flytninger refererer til element nr.)
(Nederste index refererer til elementets lokale knudenr.).

Med de anvendte betegnelser kan elementstivhedsrelationerne for de to elementer opstilles.

Element ①

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{1}} \\ P_2^{\textcircled{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{\textcircled{1}} \\ u_2^{\textcircled{1}} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Element ②

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{2}} \\ P_2^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{\textcircled{2}} \\ u_2^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Disse to udtryk er blot en gentagelse af (2.12), men opskrevet for de to aktuelle fjedre.

Kompatibilitet

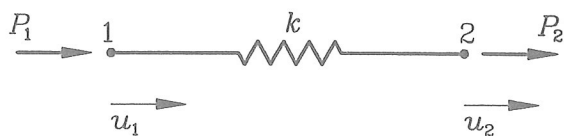
I (2.14) og (2.15) er der som sagt ikke taget hensyn til, at fjedrene skal indgå i den aktuelle konstruktion. Det gøres nu ved at kræve kompatibilitet. Det udtrykkes ved, at

$$u_1^{\textcircled{1}} = u_1 \quad u_2^{\textcircled{1}} = u_1^{\textcircled{2}} = u_2 \quad \text{og} \quad u_2^{\textcircled{2}} = u_3 \quad (2.16)$$

hvor u_1, u_2 og u_3 er flytningerne af konstruktionens knuder, jfr. figur 2.6.

Vi får nu

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{1}} \\ P_2^{\textcircled{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$



Figur 2.8. Lineærelastisk fjeder.

Ved sammenligning af figur 2.7 og 2.8 ses, at

$$N = -P_1 = P_2 \quad (2.8)$$

Af (2.7) fås derfor

$$P_2 = k(u_2 - u_1) \quad (2.9)$$

$$P_1 = -k(u_2 - u_1) \quad (2.10)$$

Det ses, at

$$P_1 + P_2 = 0 \quad (2.11)$$

Summen af elementkræfterne virkende på et element er lig med nul (ligevægt).

(2.9) giver sammenhængen mellem flytningerne af elementknudepunkterne og elementkraften P_2 i lokalknude 2.

(2.10) Tilsvarende giver (2.10) sammenhængen mellem de samme flytninger (u_1 og u_2) og elementkraften P_1 i lokalknude 1.

Hvis vi kombinerer de to, får vi elementstivhedsrelationen for et fjederelement

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

På kort form:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e \quad (2.13)$$

\mathbf{f}^e elementkraftvektor

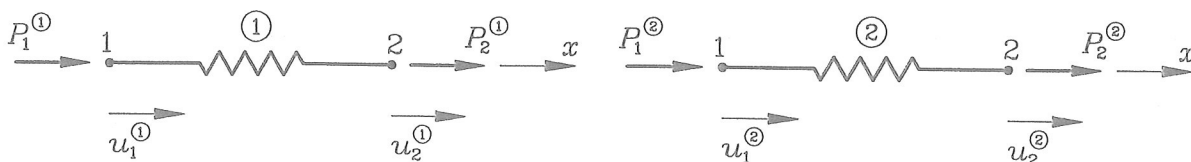
\mathbf{K}^e elementstivhedsmatrix

\mathbf{a}^e knudeflytningsvektor for elementet

Elementstivhedsrelationen (2.12), (2.13) beskriver sammenhængen mellem elementflytningerne og elementkræfterne i elementets knuder. Den gælder generelt for lineærelastiske fjedre.

Herefter opstilles elementstivhedsrelationerne for de to elementer i den aktuelle konstruktion.

Elementstivhedsrelationerne for konstruktionens elementer



Figur 2.9. Elementer med elementkræfter og knudeflytninger.

(Øverste index på elementkræfter og flytninger refererer til element nr.)

(Nederste index refererer til elementets lokale knudenr.).

Med de anvendte betegnelser kan elementstivhedsrelationerne for de to elementer opstilles.

Element ①

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{1}} \\ P_2^{\textcircled{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{\textcircled{1}} \\ u_2^{\textcircled{1}} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Element ②

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{2}} \\ P_2^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{\textcircled{2}} \\ u_2^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Disse to udtryk er blot en gentagelse af (2.12), men opskrevet for de to aktuelle fjedre.

Kompatibilitet

I (2.14) og (2.15) er der som sagt ikke taget hensyn til, at fjedrene skal indgå i den aktuelle konstruktion. Det gøres nu ved at kræve kompatibilitet. Det udtrykkes ved, at

$$u_1^{\textcircled{1}} = u_1 \quad u_2^{\textcircled{1}} = u_1^{\textcircled{2}} = u_2 \quad \text{og} \quad u_2^{\textcircled{2}} = u_3 \quad (2.16)$$

hvor u_1, u_2 og u_3 er flytningerne af konstruktionens knuder, jfr. figur 2.6.

Vi får nu

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{1}} \\ P_2^{\textcircled{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

og for element ②

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{2}} \\ P_2^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Ekspanderede elementstivhedsrelationer

Da vi har 3 ubekendte (u_2 , F_1 og F_3), er det praktisk at ekspandere elementstivhedsmatricerne, så de indeholder alle knudeflytningerne, u_1 , u_2 og u_3 .

De ekspanderede elementstivhedsrelationer:

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{1}} \\ P_2^{\textcircled{1}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ P_1^{\textcircled{2}} \\ P_2^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

På kort form

$$\mathbf{f}_1^{ee} = \mathbf{K}_1^{ee} \cdot \mathbf{a} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{f}_2^{ee} = \mathbf{K}_2^{ee} \cdot \mathbf{a} \quad (2.22)$$

\mathbf{f}_i^{ee} : ekspanderet elementkraftvektor for element i

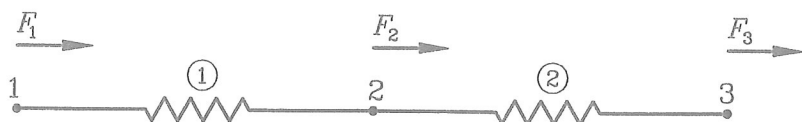
\mathbf{K}_i^{ee} : ekspanderet elementstivhedsmatrix for element i

\mathbf{a} : knudeflytningsvektor for hele konstruktionen

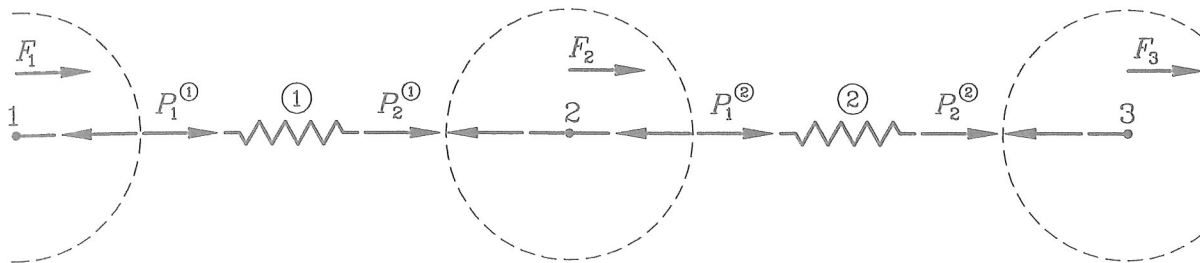
Konstruktionens stivhedsrelation

Alle elementkræfterne $P_1^{\textcircled{1}}$, $P_2^{\textcircled{1}}$, $P_1^{\textcircled{2}}$ og $P_2^{\textcircled{2}}$ er vist i figur 2.9. Der er naturligvis en sammenhæng mellem disse elementkræfter og de ydre kræfter, F_1 , F_2 og F_3 , der påvirker konstruktionen i knuderne 1, 2 og 3. Denne sammenhæng fås ved at udtrykke, at hver knude i konstruktionen skal være i ligevægt.

De ydre kræfter er vist i figur 2.10. Vi fritskærer nu knuderne og påfører elementkræfterne som vist i figur 2.11.



Figur 2.10. Konstruktionen med ydre kræfter.



Figur 2.11. Fritskæring af konstruktionens knuder.

Bemærk, at elementkræfterne virkende på knuderne, er modsat rettet de ydre kræfter i knuderne. Det er en følge af fortegnsdefinitionen og loven om aktion og reaktion.

Ligevægten af knuderne kræver, at

$$F_1 - P_1^{\textcircled{1}} = 0 \quad \text{eller} \quad F_1 = P_1^{\textcircled{1}} \quad (2.23)$$

$$F_2 - P_2^{\textcircled{1}} - P_1^{\textcircled{2}} = 0 \quad \text{eller} \quad F_2 = P_2^{\textcircled{1}} + P_1^{\textcircled{2}} \quad (2.24)$$

$$F_3 - P_2^{\textcircled{2}} = 0 \quad \text{eller} \quad F_3 = P_2^{\textcircled{2}} \quad (2.25)$$

De tre ligninger kan skrives som

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{1}} \\ P_2^{\textcircled{1}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P_1^{\textcircled{2}} \\ P_2^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

eller kort

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1^{ee} + \mathbf{f}_2^{ee} \quad (2.27)$$

hvor

\mathbf{f}_i^{ee} : ekspanderet elementkraftvektor, og

\mathbf{f} : ydre kræfter virkende i konstruktionens knuder

Vi kan nu opskrive det ligningssystem, som beskriver hele konstruktionens virkemåde.

Indsættes (2.19) og (2.20) i (2.26), fås:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

På kort form fås resultatet ved indsættelse af (2.21) og (2.22) i (2.27)

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_1^{ee} \mathbf{a} + \mathbf{K}_2^{ee} \mathbf{a} \quad (2.29)$$

eller

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \quad (2.30)$$

hvor

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1^{ee} + \mathbf{K}_2^{ee} \quad (2.31)$$

\mathbf{K} er konstruktionens stivhedsmatrix (den globale stivhedsmatrix).

Bemærk, at \mathbf{K} er symmetrisk.

Søjlematricen \mathbf{a} indeholder flytningerne af konstruktionens knudepunkter.

Søjlematricen \mathbf{f} indeholder de ydre kræfter, som er påført konstruktionens knudepunkter.

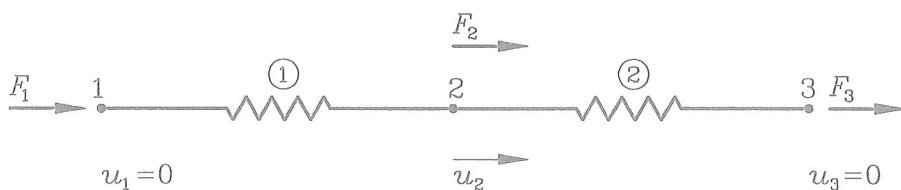
Som det fremgår af det foregående, blev element stivhedsrelationen (2.13) opstillet på grundlag af den konstitutive ligning (her Hooks lov) (2.7) og ligevægtsbetingelsen (2.11).

Ligningerne for hele konstruktionen (2.29) eller (2.30) blev opstillet på grundlag af kompatibilitetsbetingelsen (2.16) og ligevægtsbetingelserne for alle knudepunkter (2.26) eller (2.27).

Af (2.31) fremgår, at den globale stivhedsmatrix kan fremstilles ved at addere de ekspanderede elementstivhedsmatricer. Man behøver altså ikke at følge den ret møjsommelige procedure beskrevet på de foregående sider for at finde \mathbf{K} , og derfor kan (2.28) hurtigt opstilles.

Randbetingelser

For at kunne løse ligningerne (2.28) skal vi kende systemets randbetingelser. Som det fremgår af fig. 2.5, er fjeder ① fastgjort i knude 1 og fjeder ② i knude 3, dvs. $u_1 = 0$ og $u_3 = 0$. Det betyder, at F_1 og F_3 , som er reaktioner i knude 1 og 3, er ukendte. F_2 er derimod en given ydre kraft.



Figur 2.12.

Af (2.28) fås:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

eller

$$F_1 = -k_1 \cdot u_2 \quad (2.33)$$

$$F_2 = (k_1 + k_2) \cdot u_2 \quad (2.34)$$

$$F_3 = -k_2 \cdot u_2 \quad (2.35)$$

u_2 findes nu af (2.34), idet den påførte ydre kraft F_2 kendes.

Herefter findes de ukendte ydre kræfter F_1 og F_3 , som jo er reaktionerne i 1 og 3.

$$u_2 = \frac{F_2}{k_1 + k_2} \quad (2.36)$$

$$F_1 = -k_1 \cdot \frac{F_2}{k_1 + k_2} \quad (2.37)$$

$$F_3 = -k_2 \cdot \frac{F_2}{k_1 + k_2} \quad (2.38)$$

Bestemmelse af elementkræfter og fjederkræfter

Da flytningerne nu kendes ($u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = \frac{F_2}{k_1 + k_2}$), kan elementkræfterne findes af elementstivhedsrelationerne (2.17) og (2.18).

For element ① fås:

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{1}} \\ P_2^{\textcircled{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_2}{k_1 + k_2} \end{bmatrix}$$

$$P_1^{\textcircled{1}} = -k_1 \frac{F_2}{k_1 + k_2}$$

$$P_2^{\textcircled{1}} = k_1 \frac{F_2}{k_1 + k_2}$$

Fjederkraften N_1 findes af (2.8)

$$N_1 = -P_1^{\textcircled{1}} = P_2^{\textcircled{1}} = k_1 \frac{F_2}{k_1 + k_2}, \quad N_1 \text{ positiv, dvs. træk}$$

For element ② fås tilsvarende

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{2}} \\ P_2^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{F_2}{k_1 + k_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1^{\textcircled{2}} = k_2 \frac{F_2}{k_1 + k_2}$$

$$P_2^{\textcircled{2}} = -k_2 \frac{F_2}{k_1 + k_2}$$

Fjederkraften N_2 findes af (2.8)

$$N_2 = -P_1^{\textcircled{2}} = P_2^{\textcircled{2}} = -k_2 \frac{F_2}{k_1 + k_2}, \quad N_2 \text{ negativ, dvs. tryk}$$

Udtrykkene for element- og fjederkræfter gælder naturligvis kun for den betragtede konstruktion med to elementer i serie. Hvis der indgår flere elementer, vil udtrykkene se anderledes ud.

Den netop gennemgåede fremgangsmåde til bestemmelse af flytninger, reaktioner og snitkræfter virker naturligvis temmelig omstændelig, når den som her anvendes på simple overskuelige systemer.

Men systematikken i metoden gør, at den er meget anvendelig til computerberegninger. De eneste oplysninger, som er nødvendige for at gennemføre beregninger på computer, er

- oplysninger om elementernes stivhedsrelation (for fjedre oplyses fjederkonstanterne)
- oplysninger om, hvordan elementerne er forbundet (hvilke knuder er fælles)
- oplysning om ydre kræfter
- oplysning om randbetingelser (understøtningsforhold).

Et computerprogram kan herefter udregne

flytningerne af knuderne

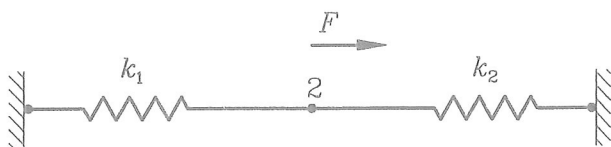
reaktioner

snitkræfter (fjederkræfterne, hvis elementerne er fjedre).

Beregning af "fjederkonstruktion" v.hj.a. CALFEM

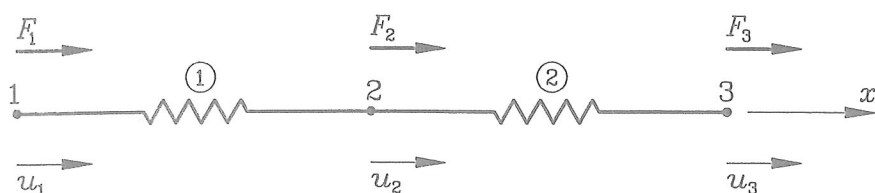
Der henvises til CALFEM: s. 5.1-1 - 5.2-5 og eks. 1, Linear spring system s. 9.3-2 - 9.3-5 samt andre relevante sider.

Anvendelsen af CALFEM illustreres på konstruktionen med de to fjedre, som vi tidligere har behandlet. Der anvendes samme talværdier som i eksemplet i afsnit 2.1, dvs. $F_2 = 3 \text{ kN}$, $k_1 = 100 \text{ kN/m}$, $k_2 = 200 \text{ kN/m}$.



Figur 2.13. Den givne konstruktion med ydre last.

Definer den statiske model



Figur 2.14. Frit legeme diagram med ydre kræfter og knudelflytninger.

To elementer, 3 frihedsgrader, u_1, u_2, u_3 , hvoraf de 2 er foreskrevne ($u_1 = u_3 = 0$).
3 ydre kræfter, hvoraf den ene er kendt (F_2).

Angiv elementernes placering i konstruktionen ved topologimatricen Edof

$$\text{Edof} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2; \\ & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Opret en tom 3×3 global stivhedsmatrix

$$K = \text{zeros}(3, 3)$$

og en lastvektor $f(3 \times 1)$ med $F = 3$ i 2. række

$$f = \text{zeros}(3, 1)$$

$$f(2) = 3$$

Elementstivhedsrelationerne genereres v.hj.a. funktionen springle.

Først information om fjederkonstanter:

$$k_1 = 100; \quad k_2 = 200$$

$$ep1 = k_1; \quad ep2 = k_2$$

Element stivhedsmatricerne $ke1$ og $ke2$ oprettes

$$ke1 = \text{springle}(ep1)$$

$$ke2 = \text{springle}(ep2)$$

Elementstivhedsmatricerne samles i den globale matrix K i overensstemmelse med topologimatricen v.hj.a. funktionen `assem`.

Først placeres $ke1$ i K

$$K = \text{assem}(\text{Edof}(1,:), K, ke1)$$

Dernæst placeres $ke2$ i K

$$K = \text{assem}(\text{Edof}(2,:), K, ke2)$$

Dvs. K er etableret.

Oplys randbetingelser. Frihedsgraderne u_1 og u_3 (1 og 3) er begge lig med nul.

$$bc = [1 \ 0 ; 3 \ 0]$$

Løs ligningssystemet (systemets stivhedsrelation) $f = K a$ m.h.t. a v.h.j.a. funktionen `solveq`

$$a = \text{solveq}(K, f, bc)$$

heraf a

Hvis reaktioner også ønskes, skrives

$$[a, Q] = \text{solveq}(K, f, bc)$$

hvor Q er reaktionsvektoren.

Med kendte knudeflytninger kan fjederkræfterne bestemmes.

Først udtages elementflytningerne af flytningsvektoren a ved anvendelse af funktionen `extract`

$$ed1 = \text{extract}(\text{Edof}(1,:), a)$$

$$ed2 = \text{extract}(\text{Edof}(2,:), a)$$

Dernæst bestemmes fjederkræfterne med funktionen `springls`

$$es1 = \text{springls}(ep1, ed1)$$

$$es2 = \text{springls}(ep2, ed2)$$

3. Plane gitterkonstruktioner

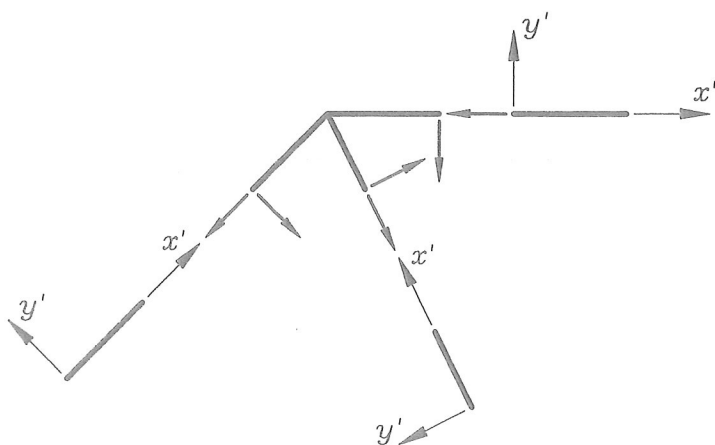
3.1 Generelt

Ligesom for den endimensionale fjederkonstruktion går opgaven ud på at finde knudeflytninger, reaktioner og stangkræfter (svarer til fjederkræfter).

Fremgangsmåden er den samme, men da de enkelte elementer ikke er orienteret i samme retning i en gitterkonstruktion, er det nødvendigt at skelne mellem lokale og globale koordinater.

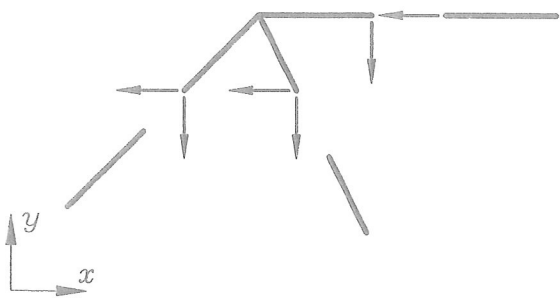
Når man opstiller elementstivhedsrelationerne, er det mest hensigtsmæssigt at gøre det i elementernes lokale koordinatsystemer.

Når man fritskærer konstruktionens knuder og opstiller ligevægtsbetingelserne for knuderne, er det imidlertid ikke hensigtsmæssigt, at elementkræfterne peger i alle mulige retninger som vist for en knude i figur 3.1. Det vil ødelægge systematikken.



Figur 3.1. Elementkræfter på fritskåret knude i lokale koordinater.

Derfor er det nødvendigt at transformere de lokale koordinater om til et globalt koordinatsystem, som er fælles for samtlige elementer, jfr. fig. 3.2. Så kan ligevægtsbetingelserne opstilles uden problemer.



Figur 3.2. Elementkræfter på fritskåret knude i globale koordinater.

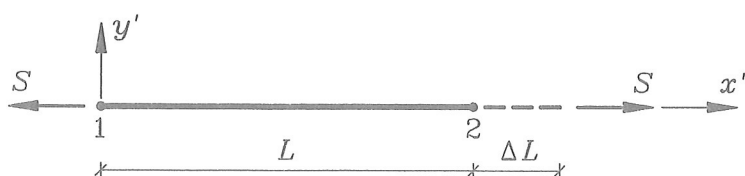
Inden transformationsformlerne udledes, opstilles stivhedsrelationen for et stangelement i lokale koordinater.

3.2 Elementets stivhedsrelation i lokale koordinater

Vi betragter en vilkårlig stang. Der indlægges et lokalt koordinatsystem med origo i lokalknude 1 og x-aksen pegende fra knude 1 til knude 2. x-aksen definerer orienteringen af elementet. y-aksen er drejet 90° mod uret i forhold til x-aksen.

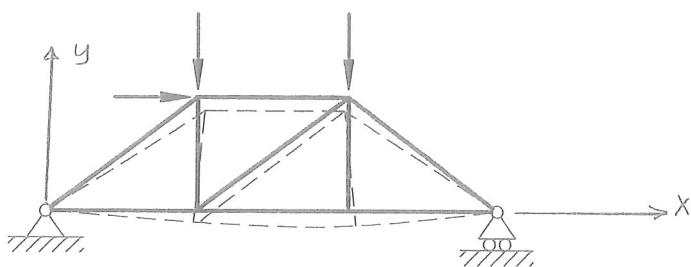
Da materialet er lineær elastisk, gælder følgende sammenhæng mellem stangkraften S (regnet positiv som træk), forlængelsen ΔL (regnet positiv som forlængelse), materialets elasticitetsmodul E , stangens længde L og stangens tværsnitsareal A :

$$S = \frac{EA}{L} \cdot \Delta L \quad (\text{Den konstitutive ligning}) \quad (3.1)$$



Figur 3.3. Stangelement.

Stangen kan altså opfattes som en elastisk fjeder med fjederkonstanten $k = \frac{EA}{L}$. Længdeændringen ΔL skyldes, at afstanden mellem knuderne ændres som følge af den ydre last på konstruktionen.

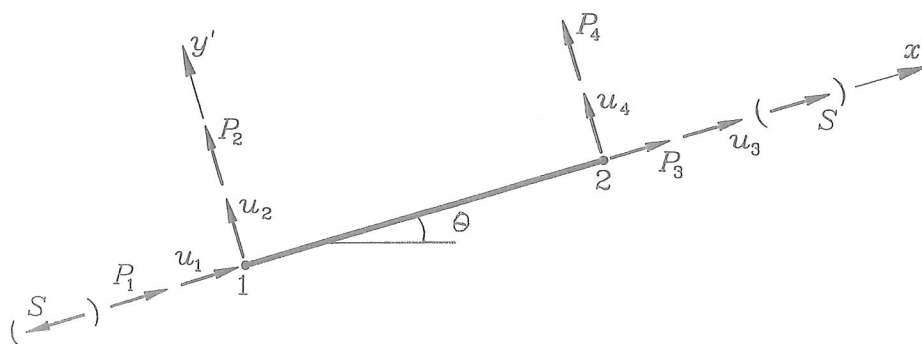


Figur 3.4. Gitterkonstruktion, deformeret på grund af ydre last.

Forskellen mellem fjederkonstruktionen, som vi behandlede tidligere, og gitterkonstruktionen er, at den første var endimensional, dvs. kun flytninger i elementretningen (x), mens den sidste er todimensional, dvs. flytninger i både x - og y -retningen, jfr. fig. 3.4. Flytningen af elementknuderne er altså vektorer, som kan beskrives ved de lokale koordinater (u_1 og u_2 ved lokalknude 1, u_3 og u_4 ved lokalknude 2).

Idet vi på tilsvarende måde indfører elementkræfterne $P_1 - P_4$, kan vi opstille elementets stivhedsrelationer i lokale koordinater.

Elementkræfterne er i realiteten stangkræfterne ved stangens ender, blot med en anden fortegneregning. Dvs. $P_2 = P_4 = 0$.



Figur 3.5.

Flytningerne vinkelret på stangens retning (u_2 og u_4) vil ikke give nogen stangkraft, da konstruktionens flytninger forudsættes at være små. Det betyder også, at stangens retning (Θ) er \sim uændret.

Flytninger i stangens retning (u_1 og u_3) giver derimod:

$$S = -P_1 = P_3 = \frac{EA}{L} \cdot (u_3 - u_1) \quad (3.2)$$

På matrixform:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

(3.3) er elementets stivhedsrelation i lokale koordinater. Hvis frihedsgraderne u_2 og u_4 inkluderes i stivhedsrelationerne, og det er praktisk af hensyn til det følgende, får den dette udseende

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

På matrix form

$$\mathbf{f}^{e'} = \mathbf{K}^{e'} \cdot \mathbf{a}^{e'} \quad (3.5)$$

e : element $'$: lokalt koordinatsystem

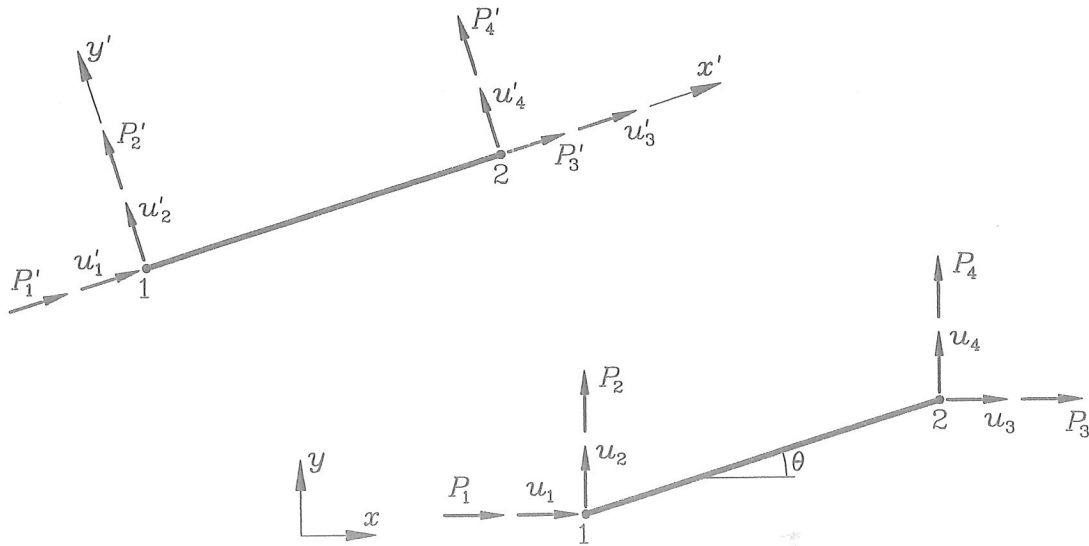
Bemærk $\mathbf{K}^{e'}$ symmetrisk

(Er elementet i ligevægt, hvis f.eks. $u_1 = 1$ og øvrige flytninger = 0?)

3.3 Elementets stivhedsrelation i globale koordinater

Vi vil nu opstille elementstivhedsrelationen i globale koordinater, men først finder vi sammenhængen mellem lokale og globale koordinater af flytninger henholdsvis elementkræfter.

Flytninger og elementkræfter i lokale koordinater forsynes med et ' for at kunne skelne dem fra de tilsvarende størrelser i globale koordinater, jfr. figur 3.6.



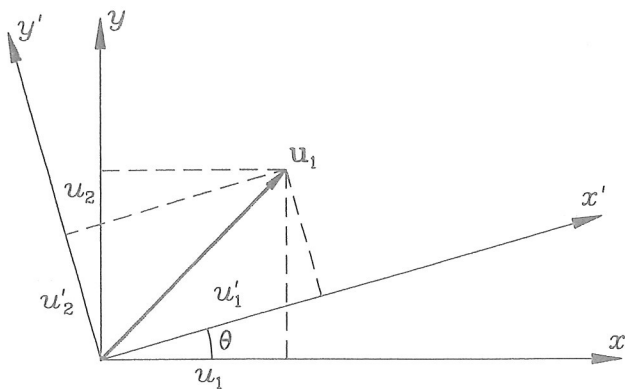
Figur 3.6. Knudeflytninger og elementkræfter i lokalt og globalt system.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \end{bmatrix} &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \end{bmatrix} & \quad \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{f}^{e'} &= \mathbf{K}^{e'} \mathbf{a}^{e'} & \quad \mathbf{f}^e &= \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e
 \end{aligned}$$

Betragt f.eks. flytningen u_1 i knude 1, jfr. figur 3.7.

Den opløses efter lokale akser i komponenterne u'_1 og u'_2 og efter de globale akser i komponenterne u_1 og u_2 .

Ved geometriske betragtninger fås de velkendte sammenhænge:



Figur 3.7. Flytningsvektoren \mathbf{u}_1 , opløst efter lokale og globale retninger.

$$u'_1 = u_1 \cos \Theta + u_2 \sin \Theta \quad (3.6)$$

$$u'_2 = -u_1 \sin \Theta + u_2 \cos \Theta \quad (3.7)$$

Omvendt:

$$u_1 = u'_1 \cos \Theta - u'_2 \sin \Theta \quad (3.8)$$

$$u_2 = u'_1 \sin \Theta + u'_2 \cos \Theta \quad (3.9)$$

Tilsvarende ligninger kan opstilles for knude 2 med flytningerne u'_3, u'_4 henholdsvis u_3 og u_4 .

Dvs. at vi kan opskrive følgende sammenhæng mellem lokale og globale flytningskomponenter for hele elementet

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Theta & \sin \Theta \\ 0 & 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

På matrix form:

$$\mathbf{a}^{e'} = \mathbf{G} \mathbf{a}^e \quad (3.11)$$

hvor \mathbf{G} er transformationsmatricen.

Omvendt fås ved anvendelse af (3.8) og (3.9) ligningerne:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Theta & -\sin \Theta \\ 0 & 0 & \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

eller

$$\mathbf{a}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{a}^{e'} \quad (3.13)$$

Da elementkræfterne kan opløses efter de to koordinatsystemer på tilsvarende måde, gælder også, at

$$\mathbf{f}^{e'} = \mathbf{G} \mathbf{f}^e \quad (3.14)$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{f}^{e'} \quad (3.15)$$

Da (3.12) (og (3.14)) også kan bestemmes ud fra (3.11) (henholdsvis (3.13)), idet der gælder den inverse relation:

$$\mathbf{a}^e = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{a}^{e'} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{f}^{e'} \quad (3.17)$$

fås ved at sammenligne (3.16) og (3.17) med (3.13) og (3.15), at

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^T \quad (3.18)$$

D.v.s. at transformationsmatricen er ortogonal.

Dette udnyttes i det følgende.

Ved at anvende (3.11) og (3.14) i (3.5) fås:

$$\mathbf{G} \mathbf{f}^e = \mathbf{K}^{e'} \mathbf{G} \mathbf{a}^e$$

eller, idet $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^T$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{f}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{K}^{e'} \mathbf{G} \mathbf{a}^e$$

dvs.

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{K}^{e'} \mathbf{G} \mathbf{a}^e$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e \quad (3.19)$$

hvor

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{K}^{e'} \mathbf{G} \quad (3.20)$$

\mathbf{K}^e er elementets stivhedsmatrix i globale koordinater.

Den afhænger ikke alene af elementets dimensioner og materialeegenskaber men også af elementets orientering i konstruktionen

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{K}^{e'} \mathbf{G}$$

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Theta & -\sin \Theta \\ 0 & 0 & \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Theta & \sin \Theta \\ 0 & 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix}$$

Udregn \mathbf{K}^e

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Der er benyttet forkortelserne c og s for $\cos \Theta$ og $\sin \Theta$.

Bemærk, at \mathbf{K}^e er symmetrisk ligesom $\mathbf{K}^{e'}$.

(3.19) er elementets stivhedsrelation i globale koordinater. Ud fra denne relation kan man opstille stivhedsrelationerne for samtlige elementer i konstruktionen.

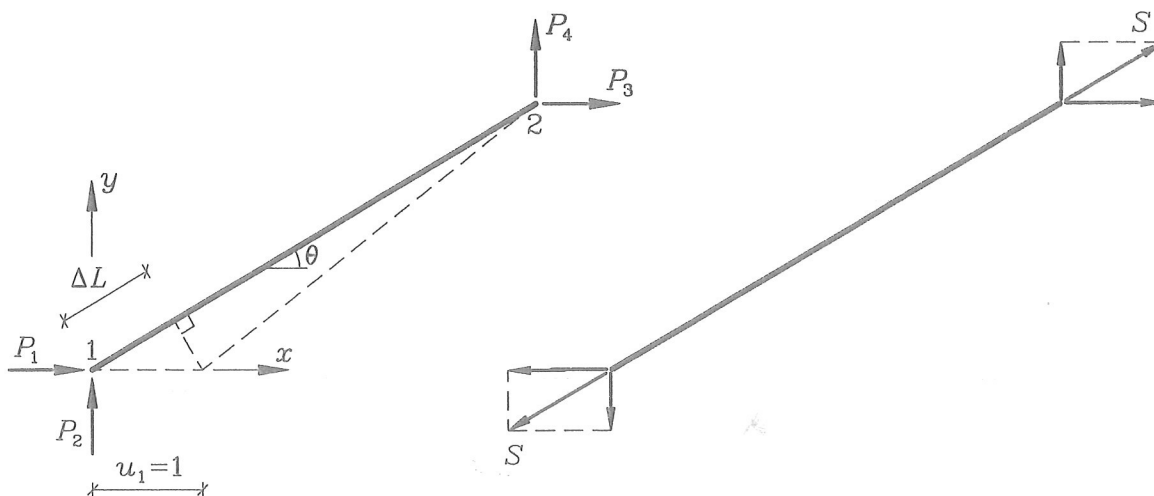
Skrevet mere detaljeret ser den sådan ud

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$(\mathbf{f}^e) \qquad \qquad \qquad (\mathbf{K}^e) \qquad \qquad \qquad (\mathbf{a}^e)$

Det er let at kontrollere elementerne i \mathbf{K}^e , når det som her drejer sig om et stangelement.

Lad os f.eks. kontrollere alle elementerne i første søjle. Det svarer til, at u_1 sættes = 1 og de øvrige flytninger = 0.



Figur 3.8. Knude 1 flyttes stykket 1 i x-aksens retning.

Flytningen medfører en længdeændring ΔL af stangen (den forkortes)

$$\Delta L = -u_1 \cos \Theta = -\cos \Theta$$

Dvs. stangkraften $S = \frac{EA}{L} \Delta L = -\frac{EA}{L} \cdot \cos \Theta$

Flytningen giver altså tryk i stangen.

Ved projektion på akserne fås ved knude 1

$$P_1 = -S \cos \Theta$$

$$P_1 = \frac{EA}{L} \cdot \cos^2 \Theta$$

$$P_2 = -S \sin \Theta$$

$$P_2 = \frac{EA}{L} \cdot \cos \Theta \cdot \sin \Theta$$

Ved projektion på akserne fås ved knude 2:

$$P_3 = S \cdot \cos \Theta \quad \text{eller} \quad P_3 = -\frac{EA}{L} \cdot \cos^2 \Theta$$

$$P_4 = S \cdot \sin \Theta \quad \text{eller} \quad P_4 = -\frac{EA}{L} \cdot \sin \Theta \cos \Theta$$

De øvrige elementer i \mathbf{K}^e kan kontrolleres på tilsvarende måde.

I dette afsnit blev stivhedsrelationen for et element i globale koordinater opstillet.

Elementets stivhedsrelation sikrer, at elementet er i ligevægt for en vilkårlig flytning af elementets knuder.

For at konstruktionen som helhed er i ligevægt, er det nødvendigt, men ikke tilstrækkeligt, at de enkelte elementer er i ligevægt. Det må yderligere kræves, at konstruktionens knuder er i ligevægt. Det gøres ved at fritskære knuderne og opstille ligevægtsbetingelserne.

Dette resulterer i, at stivhedsrelationen for hele konstruktionen kan opstilles.

I det følgende afsnit opstilles stivhedsrelationen for hele konstruktionen. Først redegøres for systemets topologi (3.4.1). Dernæst orienteres om, hvordan konstruktionens stivhedsrelation opstilles (3.4.2), og endelig illustreres fremgangsmåden i et simpelt eksempel (3.4.3).

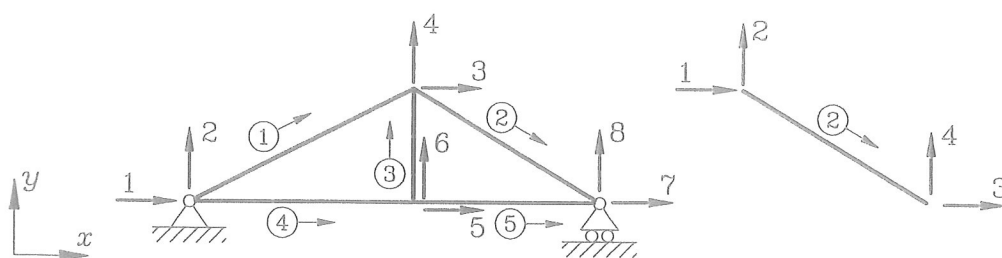
3.4 Konstruktionens stivhedsrelation

3.4.1 Konstruktionens topologi. Sammenkobling af konstruktionens elementer

I dette afsnit kobles elementerne sammen i overensstemmelse med deres placering i konstruktionen.

Det kan gøres ved, at man ud over at nummerere elementerne indfører en fortløbende global nummerering af frihedsgraderne i konstruktionen, jfr. figur 3.9.

Det vil sige, at den lokale nummerering af frihedsgraderne, som blev benyttet ved elementanalysen, nu suppleres med en global nummerering af samtlige frihedsgrader i konstruktionen.



Figur 3.9. Global nummerering af konstruktionens frihedsgrader og lokal nummerering af et elements frihedsgrader.

Ved at foreskrive hvilke globale nummereringer af frihedsgraderne, der svarer til de lokale nummereringer, bliver elementerne éntydigt placeret i konstruktionen. For konstruktionen i figur 3.9 ser det således ud

Frihedsgrader

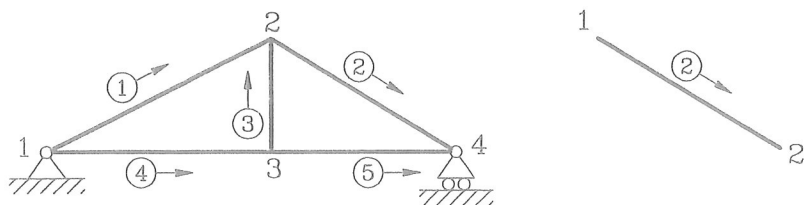
Element nr.	Global nummerering	Lokal nummerering
①	1 2 3 4	1 2 3 4
②	3 4 7 8	1 2 3 4
③	5 6 3 4	1 2 3 4
④	1 2 5 6	1 2 3 4
⑤	5 6 7 8	1 2 3 4

Den globale nummerering angives i den rækkefølge, der svarer til den lokale nummerring fra 1-4, hvor 1 og 2 er frihedsgraderne i lokalknude 1 og 3 og 4 frihedsgraderne i lokalknude 2.

Orienteringen af elementernes lokale x-akse (vist med pil ved elementnummer, jfr. figur 3.9) angiver, hvilken af knuderne der er lokalknude 1 henholdsvis 2.

Denne måde at beskrive systemets topologi på benyttes i CALFEM.

For konstruktioner med mange frihedsgrader er det fordelagtigt at lade computerprogrammet generere nummereringen af frihedsgraderne. Man angiver da, hvilke globale knudenumre, der svarer til de lokale. Den globale knude, der nævnes først, svarer til elementets lokalknude 1.



Figur 3.10. Global nummerering af konstruktionens knuder og lokal nummerering af et elements knuder.

For konstruktionen i figur 3.10 ser det således ud

Element nr.	Global nummerering	Lokal nummerering
①	1 2	1 2
②	2 4	1 2
③	3 2	1 2
④	1 3	1 2
⑤	3 4	1 2

3.4.2 Opstilling af konstruktionens stivhedsrelation

Konstruktionens knuder fritskæres, og ligevægtsligningerne opstilles i hver knude. De udtrykker, at summen af ydre kræfter og elementkræfter skal være lig med 0.

Ved at indføre elementkræfterne udtrykt ved knudeflytningerne fås konstruktionens stivhedsrelation

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \quad \text{hvor}$$

\mathbf{f} er ydre kræfter (incl. reaktioner), som påvirker konstruktionens knuder

\mathbf{K} er systemets (eller den globale) stivhedsmatrix

\mathbf{a} er knudeflytningerne i globale koordinater

Fremgangsmåden vil blive beskrevet i følgende eksempel.

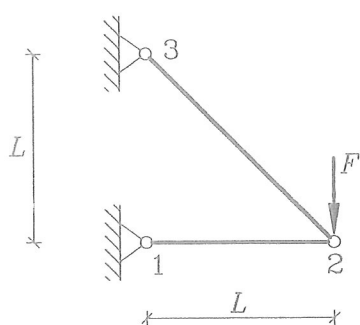
I eksemplet vises også, hvordan de ubekendte flytninger og reaktioner findes af konstruktionens stivhedsrelation, efter at randbetingelserne er indført. Resultatet benyttes til bestemmelse af snitkræfter.

3.4.3 Eksempel

Bestem reaktioner og snitkræfter i den viste gitterkonstruktion.

Konstruktionen påvirkes af en lodret nedadrettet kraft F i knude 2.

Gitterstængerne har samme tværsnitsareal A og E-modul.



Figur 3.11. Gitterkonstruktion.

Definer systemet

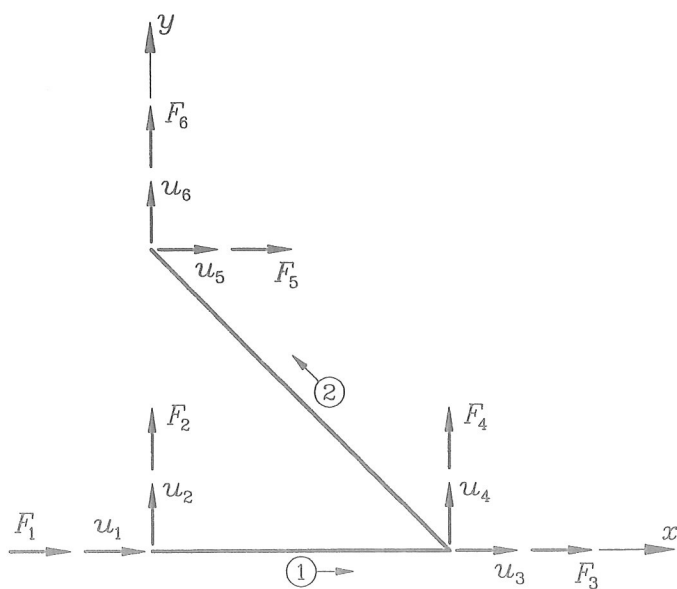
Gitterkonstruktionen består af 2 stangelementer. Den har 3 knudepunkter og $3 \times 2 = 6$ frihedsgrader. De to elementer har ganske vist 4 frihedsgrader hver, men de er fælles om de to frihedsgrader i knude 2.

Der indlægges et globalt koordinatsystem med origo i knude 1. Elementerne nummereres og orienteres (lokale koordinatsystemer).

Knudeflytninger med global nummerering ($u_1 - u_6$) og ydre kræfter ($F_1 - F_6$) påsættes konstruktionen, se figur 3.12. Fire af de 6 frihedsgrader er foreskrevne ($u_1 = u_2 = u_5 = u_6 = 0$), og to (u_3 og u_4) er ukendte.

To af de seks ydre kræfter er kendte ($F_3 = 0$, $F_4 = -F$), og fire er ukendte reaktioner i knude 1 og 3.

Disse randbetingelser benyttes senere, når det globale ligningssystem (konstruktionens stivhedsrelation) skal løses.

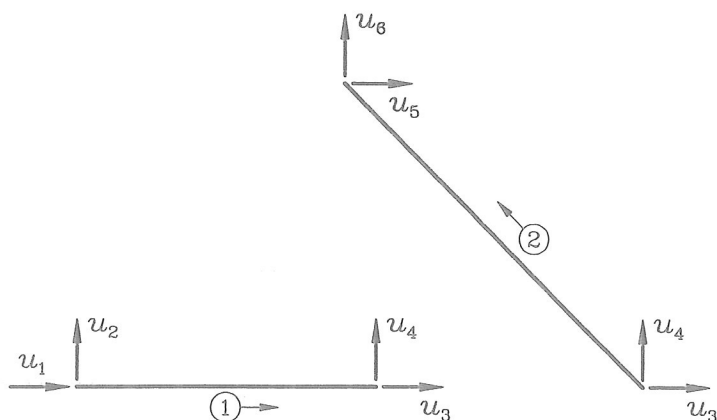


Figur 3.12. Frit legeme diagram med flytninger og ydre kræfter.

Konstruktionens topologi

Med den valgte nummerering af frihedsgraderne og orientering af elementerne kan konstruktionens topologi beskrives ved

Element nr.	Global frihedsgrad			
①	1	2	3	4
②	3	4	5	6



Figur 3.13. Global nummerering i overensstemmelse med topologien.

Elementstivhedsrelationerne i globale koordinater

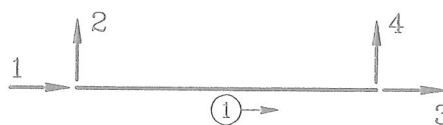
Strategien er som følger

1. Der tages udgangspunkt i de kendte elementstivhedsrelationer i lokale koordinater med lokal nummerering (1-4) af flytningerne.
2. Stivhedsrelationerne transformeres til globale retninger ved anvendelse af 3.19 og 3.20. Dvs. at elementernes frihedsgrader og elementkræfter får globale retninger, men den lokale nummerering bibeholdes. Elementnummeret markeres i en cirkel, \bigcirc .
3. Den lokale nummerering af frihedsgrader erstattes af global nummerering. Dvs. elementet placeres i konstruktionen i overensstemmelse med topologien.
4. Elementstivhedsrelationerne ekspanderes, så alle konstruktionens frihedsgrader indgår (som i konstruktionens stivhedsrelation).

Element nr. 1

For element ① kan elementstivhedsrelationen i globale koordinater opstilles direkte, idet $\Theta_1 = 0$ (dvs. lokale retninger sammenfaldende med globale retninger), og idet den globale nummerering af frihedsgraderne er den samme som elementets lokale nummerering.

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{1}} \\ P_2^{\textcircled{1}} \\ P_3^{\textcircled{1}} \\ P_4^{\textcircled{1}} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$



Figur 3.14. Global nummerering.

eller på kort form

$$\mathbf{f}_1^e = \mathbf{K}_1^e \mathbf{a}$$

Ligningssystemet ekspanderes, således at det indeholder alle konstruktionens 6 frihedsgrader

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{1}} \\ P_2^{\textcircled{1}} \\ P_3^{\textcircled{1}} \\ P_4^{\textcircled{1}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

eller på kort form

$$\mathbf{f}_1^{ee} = \mathbf{K}_1^{ee} \mathbf{a}$$

Element nr. 2

For element ② er $\Theta_2 = 135$ (dvs. $\cos \Theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ og $\sin \Theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$), og stanglængden er $\sqrt{2}L$.

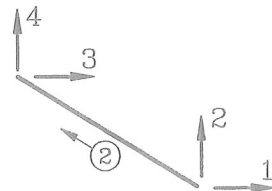
Elementets stivhedsmatrix i globale koordinater \mathbf{K}^e findes af (3.20)

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{K}^{e'} \mathbf{G}$$

hvor \mathbf{G} og \mathbf{G}^T og $\mathbf{K}^{e'}$ fås af (3.10), (3.12) og (3.4).

Man får

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{2}} \\ P_2^{\textcircled{2}} \\ P_3^{\textcircled{2}} \\ P_4^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{\textcircled{2}} \\ u_2^{\textcircled{2}} \\ u_3^{\textcircled{2}} \\ u_4^{\textcircled{2}} \end{bmatrix}$$

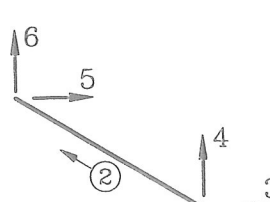


Figur 3.15. Lokal nummerering af knudflytninger.

På kort form

$$\mathbf{f}_2^e = \mathbf{K}_2^e \mathbf{a}_2^e$$

Element 2 placeres på rette plads i konstruktionen ved at erstatte den lokale nummerring af knudflytninger med den globale, jfr. topologi matricen. Idet matricen samtidig ekspanderes, fås

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1^{\textcircled{2}} \\ P_2^{\textcircled{2}} \\ P_3^{\textcircled{2}} \\ P_4^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$


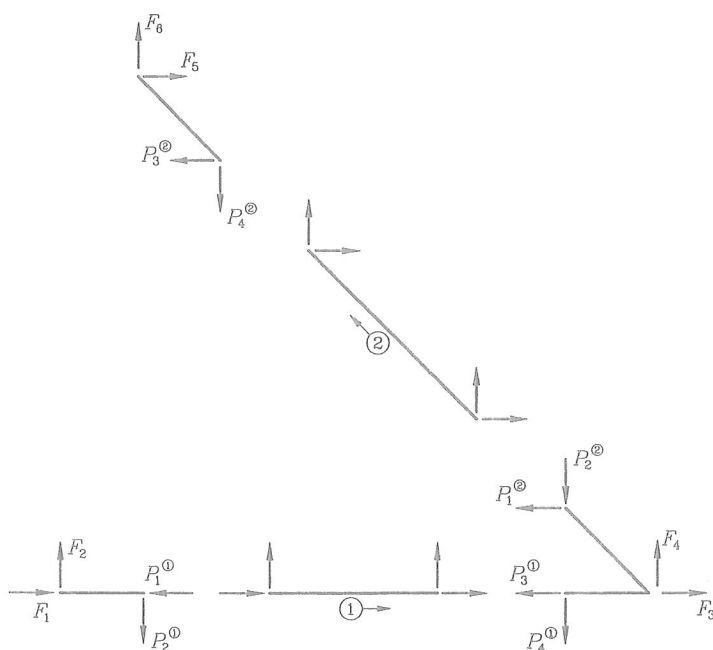
Figur 3.16. Global nummering af knudeflytninger.

På kort form

$$\mathbf{f}_2^{ee} = \mathbf{k}_2^{ee} \mathbf{a}$$

Ligevægt i konstruktionens knuder

Alle knuder fritskæres, og elementkræfterne påføres med modsat fortegn.



Figur 3.17. Fritskårne knuder med ydre kræfter og elementkræfter.

Knude 1: $F_1 = P_1^{\textcircled{1}}$, $F_2 = P_2^{\textcircled{1}}$

Knude 2: $F_3 = P_3^{\textcircled{1}} + P_1^{\textcircled{2}}$, $F_4 = P_4^{\textcircled{1}} + P_2^{\textcircled{2}}$

Knude 3: $F_5 = P_3^{\textcircled{2}}$, $F_6 = P_4^{\textcircled{2}}$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{1}} \\ P_2^{\textcircled{1}} \\ P_3^{\textcircled{1}} \\ P_4^{\textcircled{1}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1^{\textcircled{2}} \\ P_2^{\textcircled{2}} \\ P_3^{\textcircled{2}} \\ P_4^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} \quad \text{eller } \mathbf{f} = \mathbf{f}_1^{ee} + \mathbf{f}_2^{ee}$$

Indsættes elementstivhedsrelationerne fra side 26 og 27 i ligevægtsligningen, fås konstruktionens stivhedsrelation.

På kort form

$$\mathbf{f} = (\mathbf{K}_1^{ee} + \mathbf{K}_2^{ee}) \mathbf{a} \quad \text{eller}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{a}$$

Mere udførligt fås

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

Randbetingelser

Randbetingelserne indføres nu, og dernæst løses ligningssystemet.

Flytningerne ved understøtningerne er lig med 0, dvs. $u_1 = u_2 = 0$ og $u_5 = u_6 = 0$.

I knude 2 er $F_3 = 0$ og $F_4 = -F$. De resterende kræfter er ukendte reaktioner.

Ved indsættelse fås

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ -F \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Løsning af systemets ligninger

$$1 : F_1 = -\frac{EA}{L} \cdot u_3$$

$$2 : F_2 = 0$$

$$\begin{matrix} 3 : \\ 4 : \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -F \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 5 : \\ 6 : \end{matrix} \begin{bmatrix} F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

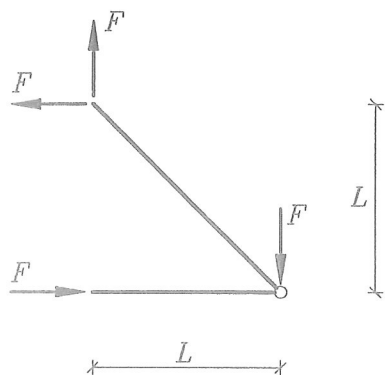
Af ligningerne (3) og (4) fås:

$$u_3 = -\frac{FL}{AE}, \quad u_4 = -(1 + 2\sqrt{2})\frac{FL}{AE}$$

Ved indsættelse i (1), (5) og (6) fås reaktionerne

$$F_1 = F, \quad F_2 = 0, \quad F_5 = -F, \quad F_6 = F$$

Er konstruktionen i ligevægt?



Figur 3.18. Ydre kræfter på konstruktionen.

Bestem stangkræfterne:

Først findes elementkræfterne af elementstivhedsrelationerne.

Element nr. 1

Det lokale koordinatsystem er sammenfaldende med det globale, derfor ikke behov for at transformere

$$\begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} P'_1 &= -\frac{EA}{L}(u'_3 - u'_1) \\ P'_3 &= \frac{EA}{L}(u'_3 - u'_1) \end{aligned}$$

$$S^{\textcircled{1}} = -P'_1 = P'_3 = \frac{EA}{L}(u'_3 - u'_1) = \frac{EA}{L}\left(-\frac{FL}{EA} - 0\right) = -F$$

Element nr. 2

Elementkræfterne findes først af elementstivhedsrelationen i globale koordinater (side 29), og derefter transformeres de til lokale koordinater ved anvendelse af (3.14).

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{2}} \\ P_2^{\textcircled{2}} \\ P_3^{\textcircled{2}} \\ P_4^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

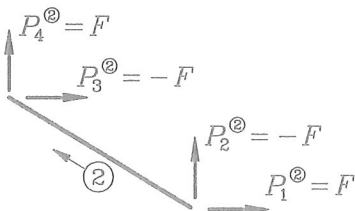
Fra tidligere haves, at $u_3 = -\frac{FL}{EA}$ og $u_4 = -(1 + 2\sqrt{2})\frac{FL}{EA}$

Løses ligningerne, fås elementkræfterne i globale koordinater

$$P_1^{\textcircled{2}} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{FL}{EA} \right) + \frac{1}{2} (1 + 2\sqrt{2}) \frac{FL}{EA} \right] = F$$

$$P_2^{\textcircled{2}} = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{FL}{EA} \right) - \frac{1}{2} (1 + 2\sqrt{2}) \frac{FL}{EA} \right] = -F$$

$$P_3^{\textcircled{2}} = -F, \quad P_4^{\textcircled{2}} = F$$



Figur 3.19. Element nr. 2 med fundne elementkræfter i globale koordinater.

$P_1^{\textcircled{2}} - P_4^{\textcircled{2}}$ transformeres til lokale koordinater ved anvendelse af (3.14)

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{G} \mathbf{f}^e$$

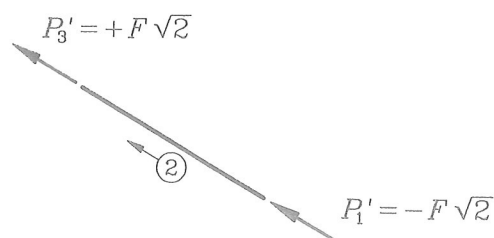
$$\begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Theta & \sin \Theta \\ 0 & 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{2}} \\ P_2^{\textcircled{2}} \\ P_3^{\textcircled{2}} \\ P_4^{\textcircled{2}} \end{bmatrix}$$

$$P'_1 = F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -F \cdot \sqrt{2}$$

$$P'_2 = -F \frac{1}{\sqrt{2}} - F \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$P'_3 = -F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + F \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = F \cdot \sqrt{2}$$

$$P'_4 = -(-F) \frac{1}{\sqrt{2}} + F \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$



Figur 3.20. Element nr. 2 med elementkræfter i lokale koordinater.

Elementkræfterne i lokale koordinater kan også findes ved anvendelse af (3.5) og (3.11), eller ved projektion på de lokale akser.

Af (3.2) fås

$$S^{\textcircled{2}} = -P'_1 = P'_3 = F\sqrt{2}$$

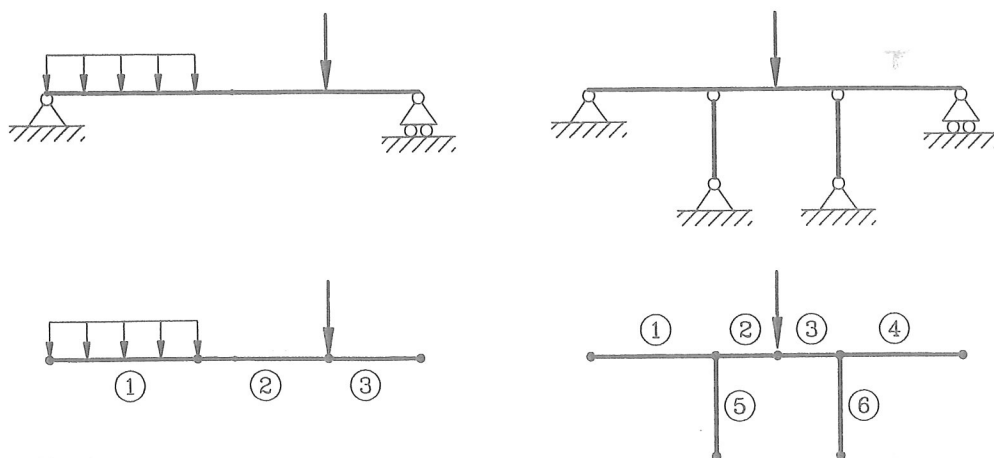
Øvelse

Beregn reaktioner og stangkræfter i gitterkonstruktionen ovenfor ved anvendelse af CALFEM, idet $L = 5$ m, $E = 10^4$ MPa, $A = 0,01$ m², $F = 5 \cdot 10^{-3}$ MN.

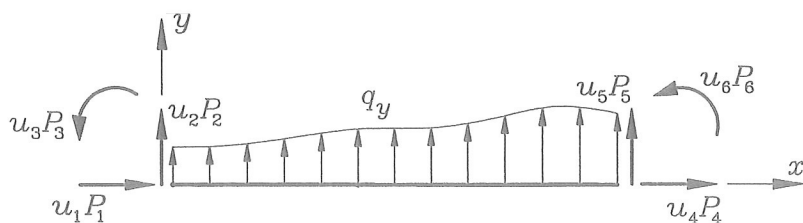
4. Plane bjælke- og rammekonstruktioner

4.1 Generelt

Disse konstruktioner opbygges af plane bjælkeelementer. Figur 4.1 viser eksempler på elementinddeling af en konstruktion.



Figur 4.1. Eksempel på elementinddeling.



Figur 4.2. Plant bjælkeelement med 6 frihedsgrader og 6 elementkræfter.

Figur 4.2 viser et plant bjælkeelement med 6 frihedsgrader, 2 flytninger og 1 vinkeldrejning ved hver bjælkeende. De tilhørende 6 elementkræfter (hvoraf 2 er momenter) er også vist.

Der forudsættes, at bjælkematerialet er lineærelastisk, og at tværsnitsarealet A og inertimomentet I er konstante langs bjælkeaksen. Normalkræfternes indflydelse på momentfordelingen ignoreres.

Elementerne kan udsættes for ydre last mellem knuderne.

Den ydre last kan være en kontinuerlig last med komponenter efter både x og y , q_x og q_y , og enkeltkræfter med komponenterne F_x og F_y . I det følgende vil vi kun medtage elementlasten q_y .

I figuren ovenfor er vist et bjælkeelement med en kontinuerlig last q_y som eneste elementlast.

4.2 Elementstivhedsrelationen i lokale koordinater

På samme måde som for stangelementet (afsnit 3.2) opstilles nu elementstivhedsrelationen for bjælkeelementet i lokale koordinater. Det lokale koordinatsystem betegnes i det følgende x', y' , jfr. figur 4.3.

Stivhedsrelationen giver sammenhængen mellem flytninger og vinkeldrejninger ved ele-

mentenderne og elementkræfterne.

Denne sammenhæng er fundet tidligere i kurset. I forbindelse med løsningen af differentialligningerne for flytninger blev forskydningskræfter og momenter ved bjælkeenderne bestemt som funktioner af flytninger i bjælkens tværretning (u_2 og u_5) og vinkel-drejninger u_3 og u_6). Sammenhængen mellem normalkræfter ved bjælkeenderne og flytningerne u_1 og u_2 blev fundet i forbindelse med stangelementet.

Elementstivhedsrelationen for et bjælkeelement kan derfor opstilles uden videre, idet man dog skal være opmærksom på fortegnssregningen for elementkræfter (jvf. fig. 4.2.).

Bidraget til elementkræfterne fra elementlasten (her q_y) vil afhænge af den aktuelle elementlast, og de må derfor udregnes i hvert enkelt tilfælde. De betegnes $P_1^0 - P_6^0$.

$$\begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \\ P_5' \\ P_6' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^{0'} \\ P_2^{0'} \\ P_3^{0'} \\ P_4^{0'} \\ P_5^{0'} \\ P_6^{0'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \\ u_5' \\ u_6' \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

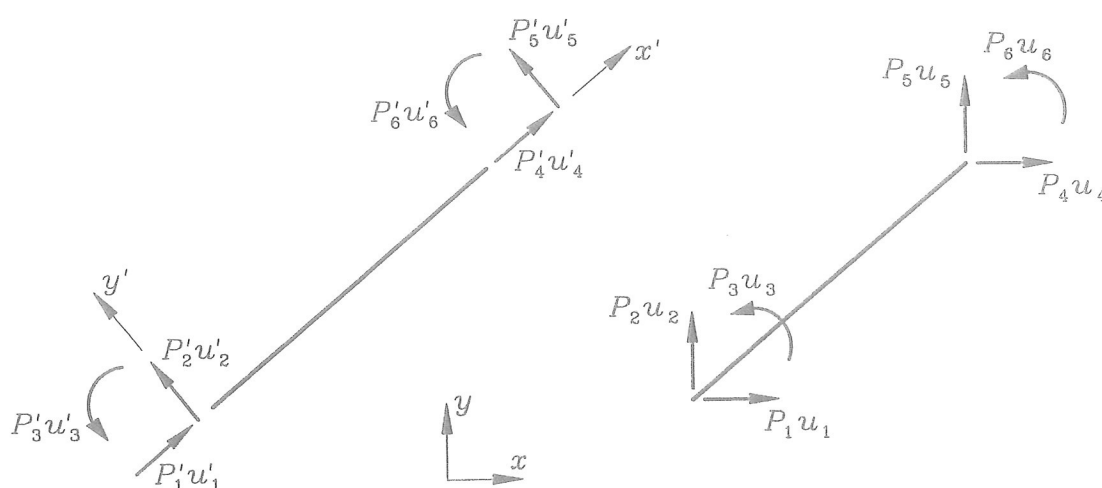
$$\mathbf{f}^{e'} = \mathbf{f}^{0e'} + \mathbf{K}^{e'} \mathbf{a}^{e'} \quad (4.2)$$

' viser, at relationen er opskrevet i lokale koordinater (x', y'), jfr. figur 4.3.

Det fremgår af (4.1), at $\mathbf{K}^{e'} = \mathbf{K}^{e'T}$ (symmetri)

4.3 Elementstivhedsrelationen i globale koordinater

Stivhedsrelationen (4.2) transformeres til globale koordinater på samme måde som tidligere vist for stangelementet (afsnit 3.3).



Figur 4.3. Elementkræfter og flytninger i lokale og globale koordinater.

Vinkeldrejningerne u_3 og u_6 og momenterne P_3 og P_4 vil være uafhængige af transformationen.

Transformationsmatricen bliver derfor

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \\ u_5' \\ u_6' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{a}^{e'} = \mathbf{G} \mathbf{a}^e \quad (4.4)$$

Tilsvarende fås for elementkræfterne

$$\mathbf{f}^{e'} = \mathbf{G} \mathbf{f}^e \quad \text{og} \quad \mathbf{f}^{0e'} = \mathbf{G} \mathbf{f}^{0e} \quad (4.5)$$

Som for stangelementet gælder, at $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^T$

Ved indsættelse af (4.4) og (4.5) i (4.2) fås

$$\mathbf{G} \mathbf{f}^e = \mathbf{G} \mathbf{f}^{0e} + \mathbf{K}^{e'} \mathbf{G} \mathbf{a}^e \quad (4.6)$$

Ved multiplikation med $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^T$ fås

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}^{0e} + \mathbf{G}^T \mathbf{K}^{e'} \mathbf{G} \mathbf{a}^e \quad (4.7)$$

eller

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}^{0e} + \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e \quad (4.8)$$

hvor

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{K}^{e'} \mathbf{G} \quad (4.9)$$

(4.8) er bjælkeelementets stivhedsrelation i globale koordinater.

4.4 Konstruktionens stivhedsrelation

4.4.1 Generelt

Fremgangsmåden er den samme, som blev illustreret for en gitterkonstruktion i afsnit 3.4.

Konstruktionens stivhedsrelation etableres ved at opstille ligevægtsbetingelserne for konstruktionens løsskårne knuder. Herved findes sammenhængen mellem ydre kræfter i knuderne og elementkræfterne.

Ved at benytte de tidligere fundne elementstivhedsrelationer (4.8) i disse ligninger fås stivhedsrelationen

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^0 + \mathbf{K}\mathbf{a} \quad (4.10)$$

hvor

\mathbf{f} ydre kræfter i knuderne (enten givne ydre laster eller ukendte reaktioner)

\mathbf{f}^0 elementkræfter fra ydre elementlaster (i dette eksempel fra lasten q)

\mathbf{K} konstruktionens stivhedsmatrix (global stivhedsmatrix)

\mathbf{a} globale knudeflytninger

For at løse systemets ligninger skal randbetingelserne indføres.

Løsningen giver reaktioner og knudeflytninger i globale koordinater. Snitkræfterne kan herefter bestemmes af elementstivhedsrelationerne.

Princippet i fremgangsmåden illustreres i følgende eksempel.

4.5. Eksempel. Plan ramme

Figuren viser en plan ramme, som belastes med en jævnt fordelt last på strækningen AB. Rammen er indspændt i A, C og D, og de tre dele er stift forbundet i B.

Opgave: Find knudeflytninger, reaktioner og snitkræfter

Ved gennemregning af eksemplet i hånden, jfr. øvelse side 49, og ved beregning v.h.a. Calfem benyttes følgende talværdier for E , A , I , L og q

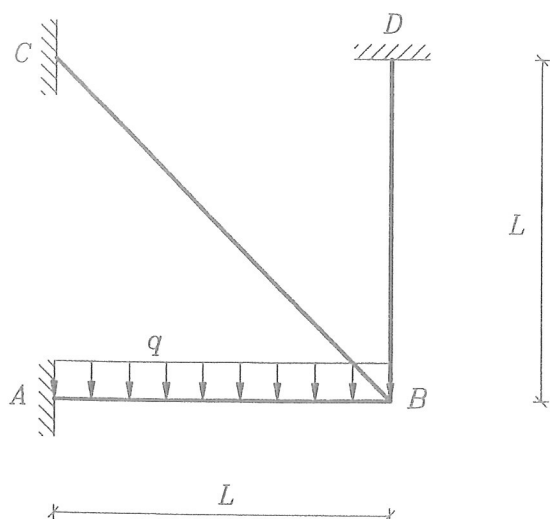
$$E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$A = 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$I = 2,0 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$q = 2,0 \text{ kN/m}$$

$$L = 1,0 \text{ m}$$

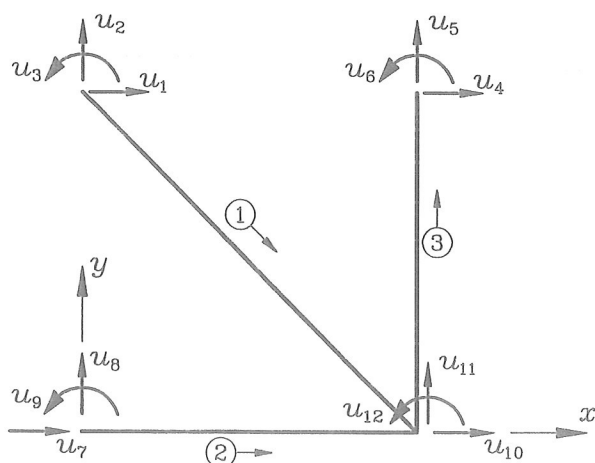


Figur 4.4. Plan ramme.

Definer systemet

Rammen inddeles i 3 bjælkeelementer. Den får derfor 4 knudepunkter og $4 \times 3 = 12$ frihedsgrader.

Der indlægges et globalt koordinatsystem med origo i A. Elementerne nummereres og orienteres. Frihedsgraderne angives med global nummerering (1-12), se figur 4.5.



Figur 4.5. Nummerering af elementer og frihedsgrader.

Konstruktionens topologi

Med den valgte nummerering kan rammens topologi beskrives

	Frihedsgrader						
Element nr.	Global nummerering						Lokal nummerering
①	1	2	3	10	11	12	1 2 3 4 5 6
②	7	8	9	10	11	12	1 2 3 4 5 6
③	10	11	12	4	5	6	1 2 3 4 5 6

Af de 12 frihedsgrader er 9 foreskrevne, idet de tre rammeben er fast indspændte, dvs. $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = u_9 = 0$

Det benyttes senere, når randbetingelserne indføres.

Konstruktionens stivhedsrelation

Det globale ligningssystem (konstruktionens stivhedsrelation), som skal løses, kan jfr. afsnit 4.4 skrives som

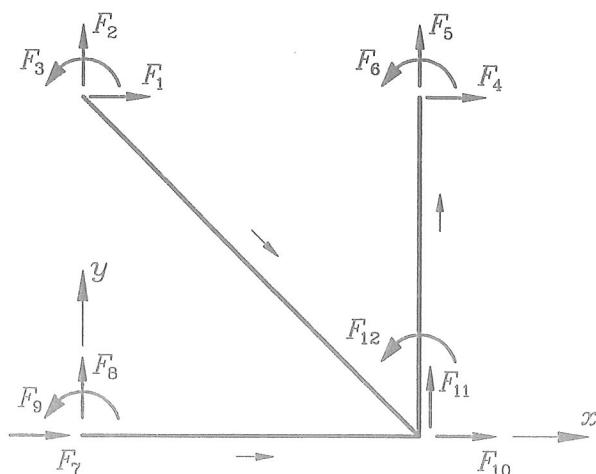
$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^0 + \mathbf{K}\mathbf{a}$$

I dette eksempel med 12 frihedsgrader kan ligningssystemet mere detaljeret skrives som

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^0 \\ \vdots \\ P_{12}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \mathbf{K}(12 \times 12) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{12} \end{bmatrix}$$

De ydre kræfter i knuderne, $F_1 - F_{12}$, er vist i figur 4.6.

$F_1 - F_9$ er ukendte reaktioner, og $F_{10} = F_{11} = F_{12} = 0$, da der ikke er nogen ydre last i den pågældende knude.



Figur 4.6. Ydre kræfter i konstruktionens knuder.

CALFEM kommandoer

```
edof = [1  1  2  3  10  11  12;
        2  7  8  9  10  11  12;
        3  10  11  12  4  5  6];
```

etablerer konstruktionens topologi.

$K = \text{zeros}(12,12)$; etablerer en tom 12×12 global stivhedsmatrix.

$f = \text{zeros}(12,1)$; etablerer en tom kraftvektor.

Elementstivhedsrelationerne opstilles i globale koordinater

Strategien er som følger:

1. Der tages udgangspunkt i de kendte elementstivhedsrelationer i lokale koordinater med lokal nummerering (1-6) af både flytninger og elementkræfter (4.1).

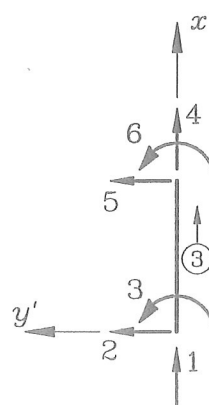
2. Stivhedsrelationerne transformeres til globale retninger.
3. Den lokale nummerering af frihedsgrader erstattes af global nummerering. Dvs. elementet placeres i konstruktionen i overensstemmelse med topologien.
4. Elementstivhedsrelationerne ekspanderes, så alle konstruktionens frihedsgrader indgår (som i konstruktionens stivhedsrelation).

Element nr. 3

Trin 1

Dette element er ikke påvirket af nogen ydre last. Derfor bliver den lokale stivhedsrelation

$$\begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \\ P'_5 \\ P'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \\ u'_5 \\ u'_6 \end{bmatrix}$$



På kort form

$$\mathbf{f}_3^{e'} = \mathbf{K}_3^{e'} \mathbf{a}_3^{e'}$$

Trin 2 (ikke vist i detaljer)

Transformation til globale retninger ved anvendelse af (4.8) og (4.9).

Vinklen mellem den globale x-akse og elementets lokale x-akse er $\Theta = 90^\circ$

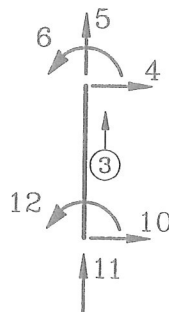
$$\mathbf{f}_3^e = \mathbf{K}_3^e \mathbf{a}_3^e \quad \text{hvor } \mathbf{K}_3^e \text{ fås af (4.9)}$$

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{K}^{e'} \mathbf{G}$$

Trin 3

Den lokale nummerering af frihedsgrader erstattes af global nummerering i overensstemmelse med topologien. For nemheds skyld er elementerne i \mathbf{K}^e betegnet k_{ij} . ③ angiver elementnummer.

$$\begin{bmatrix} P_1^{③} \\ P_2^{③} \\ P_3^{③} \\ P_4^{③} \\ P_5^{③} \\ P_6^{③} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$



På kort form

$$\mathbf{f}_3^e = \mathbf{K}_3^e \mathbf{a}$$

\mathbf{f}^e elementkræfter i globale koordinater

\mathbf{a} globale knudeflytninger

Trin 4

Placer elementets 6×6 stivhedsmatrix i konstruktionens 12×12 matrix. Eller med andre ord: ekspander elementstivhedsrelationen således, at alle 12 frihedsgrader indgår.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_4^{\textcircled{3}} \\ P_5^{\textcircled{3}} \\ P_6^{\textcircled{3}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1^{\textcircled{3}} \\ P_2^{\textcircled{3}} \\ P_3^{\textcircled{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & k_{45} & k_{46} & 0 & 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} \\ 0 & 0 & 0 & k_{54} & k_{55} & k_{56} & 0 & 0 & 0 & k_{51} & k_{52} & k_{53} \\ 0 & 0 & 0 & k_{64} & k_{65} & k_{66} & 0 & 0 & 0 & k_{61} & k_{62} & k_{63} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{14} & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 & 0 & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & 0 & 0 & k_{24} & k_{25} & k_{26} & 0 & 0 & 0 & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 & k_{34} & k_{35} & k_{36} & 0 & 0 & 0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}$$

På kort form

$$\mathbf{f}_3^{ee} = \mathbf{K}_3^{ee} \mathbf{a}$$

\mathbf{f}_3^{ee} Ekspanderet elementkraftvektor for element nr. 3

\mathbf{K}_3^{ee} Ekspanderet elementstivhedsmatrix for element nr. 3

\mathbf{a} Globale flytninger

Bemærk, at ligningens venstre side er elementets bidrag til ligevægtsligningen side 45.

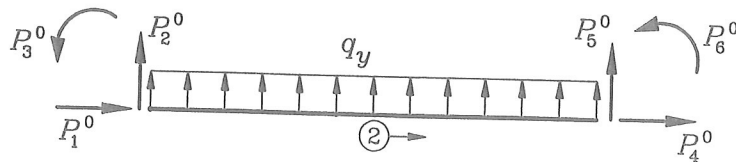
Element nr. 2

Trin 1

Elementets stivhedsrelation i lokale koordinater er (4.2)

$$\mathbf{f}^{e'} = \mathbf{f}^{0e'} + \mathbf{K}^{e'} \cdot \mathbf{a}^{e'}$$

$\mathbf{f}^{0e'}$ er elementkræfterne fra den jævnt fordelte last, q_y , som påvirker elementet, jfr. figur 4.7.



Figur 4.7. Linielast på elementet.

Elementkræfterne fra denne last udregnes f.eks. v.hj.a. differentiaalligninger. Resultatet bliver

$$\mathbf{f}_2^{0e'} = \begin{bmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \\ P_3^0 \\ P_4^0 \\ P_5^0 \\ P_6^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{q_y l}{2} \\ -\frac{q_y l^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{q_y l}{2} \\ \frac{q_y l^2}{12} \end{bmatrix}$$

Dvs. at stivhedsrelationen er kendt, idet $\mathbf{K}_2^{e'}$ er den samme som for element 3.

Trin 2

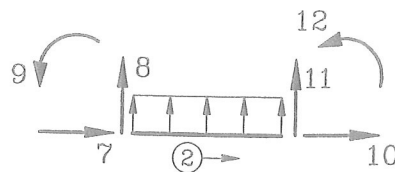
Da lokale og globale koordinater er sammenfaldende for element nr. 2, skal der ikke transformeres.

$$\mathbf{K}_2^{e'} = \mathbf{K}_2^e \quad \text{og} \quad \mathbf{f}_2^{0e'} = \mathbf{f}_2^{0e}, \quad \mathbf{a}_2^{e'} = \mathbf{a}_2^e$$

Trin 3

Elementet placeres i konstruktionen i overensstemmelse med topologien. Dvs. lokale nummereringer af frihedsgrader erstattes af globale.

$$\begin{bmatrix} P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \\ P_4^{(2)} \\ P_5^{(2)} \\ P_6^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ 0 \\ \frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \mathbf{K}_2^e \begin{bmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}$$



Trin 4

Ekspander ligningssystemet, således at alle frihedsgrader indgår.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1^{\textcircled{2}} \\ P_2^{\textcircled{2}} \\ P_3^{\textcircled{2}} \\ P_4^{\textcircled{2}} \\ P_5^{\textcircled{2}} \\ P_6^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ 0 \\ \frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}$$

Ligningens venstre side er elementets bidrag til ligevægtsligningen side 42.

På kort form

$$\mathbf{f}_2^{ee} = \mathbf{f}_2^{0ee} + \mathbf{K}_2^{ee} \mathbf{a}$$

Element nr. 1

Fremgangsmåden ved bestemmelsen af elementets stivhedsrelation i globale koordinater er som beskrevet for element 2 og 3. Der er ingen elementlast. Vinklen mellem global og lokal x-akse er $\Theta = 315^\circ$ (eller -45°).

Resultatet bliver

$$\begin{bmatrix} P_1^{\textcircled{1}} \\ P_2^{\textcircled{1}} \\ P_3^{\textcircled{1}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_4^{\textcircled{1}} \\ P_5^{\textcircled{1}} \\ P_6^{\textcircled{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}$$

Ligningens venstre side er elementets bidrag til ligevægtsligningen side 42.

På kort form

$$\mathbf{f}_1^{ee} = \mathbf{K}_1^{ee} \mathbf{a}$$

Hermed er de 3 ekspanderede elementstivhedsrelationer etableret i princippet. Det overlades til læseren at udregne elementerne k_{ij} i matricerne ved håndregning og ved anvendelse af CALFEM.

De ekspanderede elementstivhedsmatricer etableres med CALFEM kommandoerne:

```
ex1 = [0 1]; ex2 = [0 1]; ex3 = [1 1]
ey1 = [1 0]; ey2 = [0 0]; ey3 = [0 1]
E = 2e11; A = 5e-4; I = 2e-8; ep = [E A I];
eq2 = [0 -2e3];
```

```
Ke1 = beam2e (ex1, ey1, ep);
```

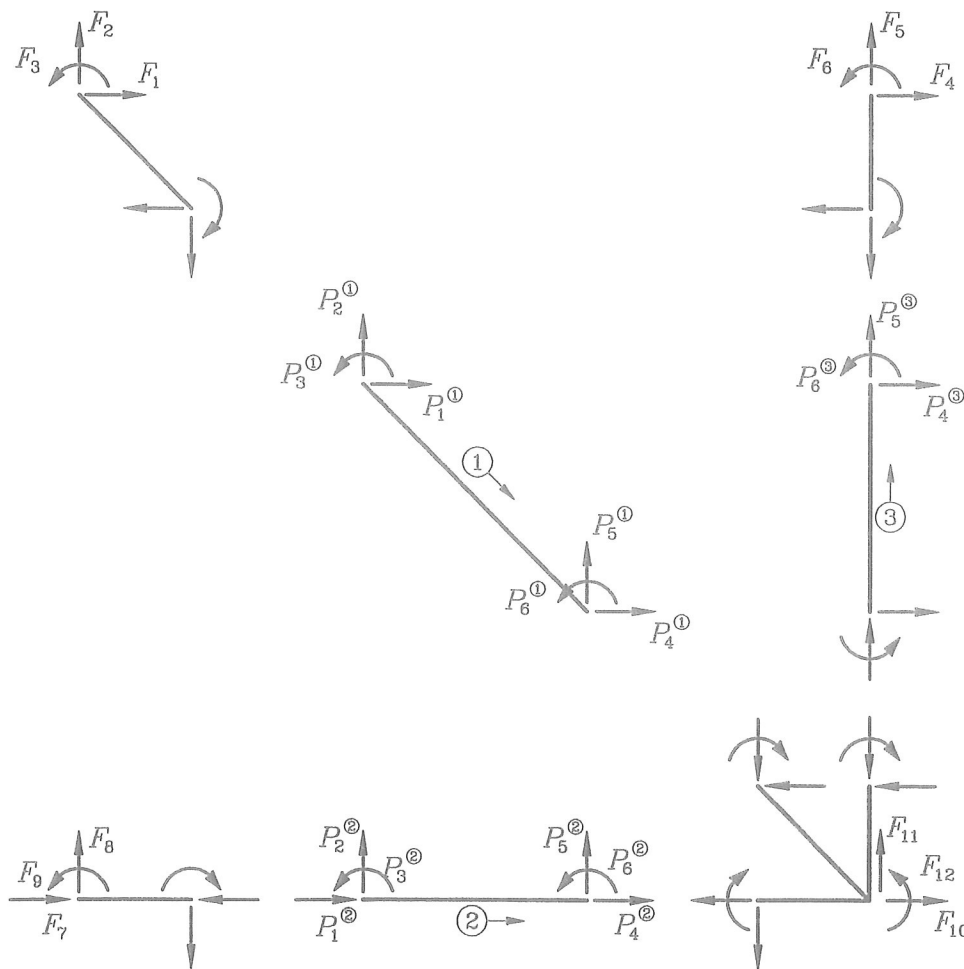
```
[Ke2, fe2] = beam2e (ex2, ey2, ep, eq2);
```

```
Ke3 = beam2e (ex3, ey3, ep);
```

Herefter betragtes hele konstruktionen. Ligevægt af konstruktionen sikres ved, at konstruktionens knuder er i ligevægt.

Ligevægt af konstruktionens knuder

Konstruktionens knuder fritskæres. Ydre kræfter og elementkræfter med modsat fortegn påsættes knuderne. Bemærk, at elementkræfterne, som er nummereret fra 1-6, i alle elementerne nu er forsynet med elementnummeret (i en cirkel).



Figur 4.8. Konstruktionen med fritskårne knuder påvirket af ydre kræfter og elementkræfter.

De 12 ligevægtsligninger (3 for hver knude) opstilles.

$$\begin{array}{c} C \\ D \\ A \\ B \end{array} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_4^{(1)} \\ P_5^{(1)} \\ P_6^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \\ P_4^{(2)} \\ P_5^{(2)} \\ P_6^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_4^{(3)} \\ P_5^{(3)} \\ P_6^{(3)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1^{(3)} \\ P_2^{(3)} \\ P_3^{(3)} \end{bmatrix}$$

①
②
③

På kort form

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1^{ee} + \mathbf{f}_2^{ee} + \mathbf{f}_3^{ee}$$

Den valgte fortegnsregning betyder, at elementkræfterne altid vil være modsat rettet de ydre kræfter i knuderne. Derfor kan ligningerne opstilles direkte, når konstruktionens topologi er beskrevet, jfr. fig. 4.5. Det overlades til læseren at foretage denne lille øvelse.

Systemets ligninger

Med de fundne elementstivhedsrelationer og ligevægtsligninger for konstruktionens knuder kan systemets stivhedsrelation opstilles. De ekspanderede elementrelationer lyder

$$\mathbf{f}_1^{ee} = \mathbf{K}_1^{ee} \mathbf{a}$$

$$\mathbf{f}_2^{ee} = \mathbf{f}_2^{0e} + \mathbf{K}_2^{ee} \mathbf{a}$$

$$\mathbf{f}_3^{ee} = \mathbf{K}_3^{ee} \mathbf{a}$$

Indsættes elementstivhedsrelationerne i ligevægtsligningen ovenfor, fås

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_1^{ee} \mathbf{a} + \mathbf{f}_2^{0e} + \mathbf{K}_2^{ee} \mathbf{a} + \mathbf{K}_3^{ee} \mathbf{a} \quad \text{eller}$$

$$\mathbf{f} = (\mathbf{K}_1^{ee} + \mathbf{K}_2^{ee} + \mathbf{K}_3^{ee}) \mathbf{a} + \mathbf{f}_2^{0e} \quad \text{eller}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f}^0$$

hvor

\mathbf{K} er konstruktionens (den globale) stivhedsmatrix. Den fremkommer ved at addere de ekspanderede elementstivhedsmatricer.

På tilsvarende måde fremkommer vektoren \mathbf{f}^0 , idet bidrag fra de enkelte elementer placeres i \mathbf{f}^0 i overensstemmelse med topologien. I dette eksempel, hvor der kun er bidrag fra element nr. 2, er $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}_2^{0e}$.

I CALFEM etableres \mathbf{K} og \mathbf{f}^0 med kommandoerne

```
K = assem(edof(1,:),K,Ke1);
[K,f] = assem(edof(2,:),K,Ke2,fe2);
K = assem(edof(3,:),K,Ke3);
```

\mathbf{K} er tidligere defineret som en tom 12×12 matrix, og assem placerer efter tur de 3 ekspanderede elementmatricer i \mathbf{K} .

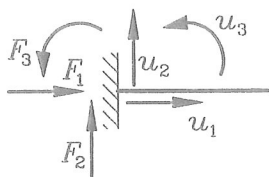
Tilsvarende med \mathbf{f}^0 .

Randbetingelser

Ligningssystemet er i første omgang opstillet uden hensyn til randbetingelserne. De indføres nu, hvorefter ligningerne løses. I dette eksempel er alle 3 understøtninger fast indspændte. Dvs. at de 3 flytningskomponenter (flytning i bjælkeaksen, vinkelret på bjælkeaksen og vinkeldrejningen) er nul ved understøtningerne.

Med den valgte nummerering af frihedsgraderne betyder det, at $u_1 - u_9$ alle har foreskrevet værdien nul.

Til disse kendte flytninger svarer ukendte kræfter, reaktioner. Dvs. at kræfterne (reaktioner) $F_1 - F_9$ er ukendte.



Figur 4.9. Fast indspænding, $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, F_1, F_2, F_3 ukendte reaktioner.

Omvendt vil kendte kræfter betyde, at flytningerne er ukendte.

I konstruktionens knude B er de ydre knudelaster kendte, idet $F_{10} = F_{11} = F_{12} = 0$, hvorimod flytningerne u_{10} , u_{11} og u_{12} er ukendte.

Med de givne randbetingelser fås

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ 0 \\ \frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}^0 \end{array} + \begin{array}{c} \mathbf{K} \\ \mathbf{K} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} \\ \mathbf{a} \end{array}$$

Løsning af systemets ligninger

Først løses ligningerne med de ukendte flytninger (i dette eksempel de 3 nederste). I disse ligninger kendes de ydre kræfter (venstre side af ligningerne). De ukendte reaktioner, $F_1 - F_9$, bestemmes herefter af de øverste 9 ligninger.

CALFEM kommandoer til bestemmelse af flytninger og reaktioner (Q)

$bc = [1 \ 0; 2 \ 0; 3 \ 0; 4 \ 0; 5 \ 0; 6 \ 0; 7 \ 0; 8 \ 0; 9 \ 0];$

$[a, Q] = \text{solveq}(\mathbf{K}, \mathbf{f}, bc)$

Bestemmelse af snitkræfter

Først bestemmes elementkræfterne i lokale koordinater af (4.2) og (4.4).

$$\mathbf{f}^{e'} = \mathbf{f}^{0e'} + \mathbf{K}^{e'} \mathbf{a}^{e'} \quad (4.2)$$

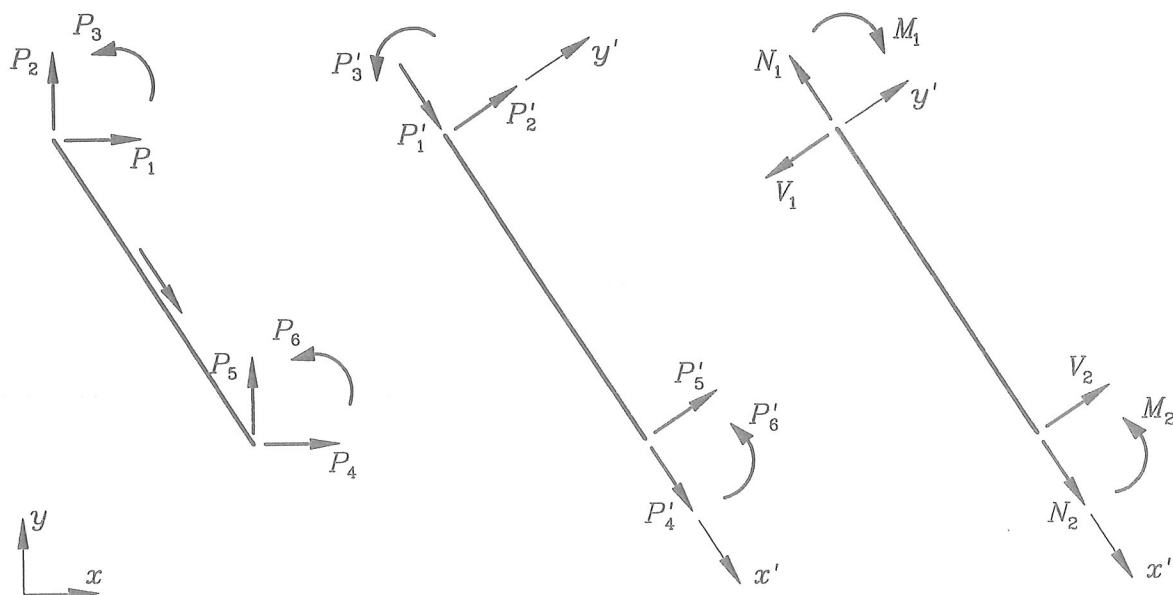
da $\mathbf{a}^{e'} = \mathbf{G} \mathbf{a}^e$ (4.4) fås

$$\mathbf{f}^{e'} = \mathbf{f}^{0e'} + \mathbf{K}^{e'} \mathbf{G} \mathbf{a}^e$$

Nu er elementkræfterne i lokale koordinater udtrykt ved knudeflytningerne i globale koordinater, som er fundet tidligere.

De flytninger, som er aktuelle for det pågældende element, fremgår af topologimatricen.

Elementkræfterne i lokale koordinater er i realiteten snitkræfterne ved bjælkeenderne på nær fortegneregningen, som er forskellig, jfr. figur 4.10.



Figur 4.10. Globale og lokale elementkræfter samt snitkræfter.

$$N_1 = -P'_1, \quad V_1 = -P'_2, \quad M_1 = -P'_3$$

$$N_2 = P'_4, \quad V_2 = P'_5, \quad M_2 = P'_6$$

Når snitkræfterne i bjælkeenderne er bestemt, kan snitkræfternes variation over bjælkeelementerne bestemmes på sædvanlig måde ved anvendelse af ligevægtsligningerne.

CALFEM kommandoer til bestemmelse af snitkræfter.

Elementflytningerne udtages af flytningsvektoren a

```
ed1 = extract(edof(1,:), a);
ed2 = extract(edof(2,:), a);
ed3 = extract(edof(3,:), a);
```

Med kendte elementflytninger beregnes snitkræfterne ved elementknuderne som beskrevet ovenfor

```
es1 = beam2s(ex1,ey1,ep,ed1)
es2 = beam2s(ex2,ey2,ep,ed2)
es3 = beam2s(ex3,ey3,ep,ed3)
```

Resultaterne vurderes

Er randbetingelserne opfyldt?

Er konstruktionen i ligevægt?

Projektion på x : $F_1 + F_2 + F_4 + F_7 = 0$?

Projektion på y: $F_2 + F_5 + F_8 + F_{11} = 0$?

Moment om B: $-F_1 \cdot L - F_2 \cdot L + F_3 - F_4 \cdot L + F_6 - F_8 \cdot L + F_9 + F_{12} = 0$?

Ser flytningerne rimelige ud?

ØVELSE

I eksemplet ovenfor udføres beregningerne i hånden og kontrolleres v.hj.a. CALFEM. De givne data vedr. last, geometri, tværsnitskonstanter og E-modul benyttes i udregningerne.

Elementstivhedsrelationerne i lokale og globale koordinater opstilles.

Konstruktionens stivhedsmatrix bestemmes.

De ukendte knudeflytninger og reaktioner beregnes.

Elementkræfterne beregnes.

Snitkræfterne i bjælkeelementerne beregnes og optegnes.

Resultaterne kontrolleres.

4.6 Konstruktioner med charnierer

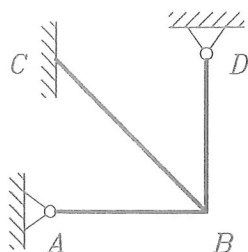
I eksemplet i afsnit 4.5 er alle bjælkeelementer stift forbundne i knuderne, dvs. i de respektive understøtninger samt i den fælles knude B.

Hvis der indføres charnier i en eller flere af understøtningerne, betyder det blot, at randbetingelserne skal ændres.

Hvis man f.eks. indfører charnier i A og D, som vist i fig. 4.11 (dvs. erstatter de faste indspændinger med faste simple understøtninger), er flytningerne u_6 og u_9 (se fig. 4.5) ukendte. Til gengæld kender vi nu indspændingsmomenterne ved A og D. De er begge lig med nul.

De ændrede understøtningsbetingelser medfører kun ændring af randbetingelserne. De bliver nu

$bc = [1 \ 0; 2 \ 0; 3 \ 0; 4 \ 0; 5 \ 0; 7 \ 0; 8 \ 0;]$

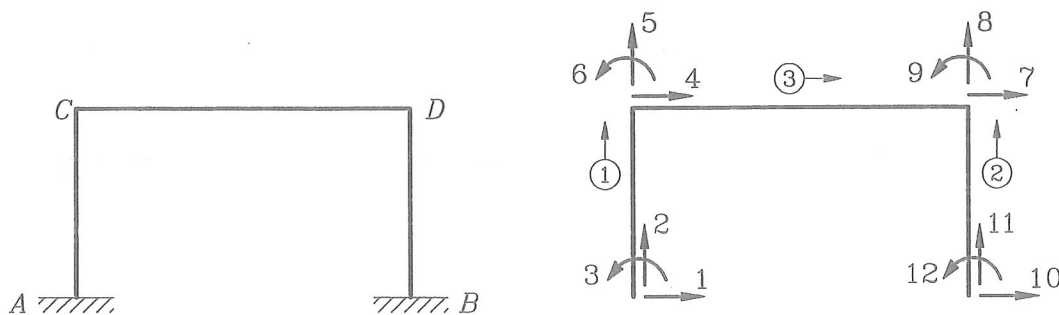


Figur 4.11. Ramme med indspænding i C og faste simple understøtninger i A og D.

Hvis der indlægges et charnier i en indre knude i en konstruktion, er situationen lidt anderledes.

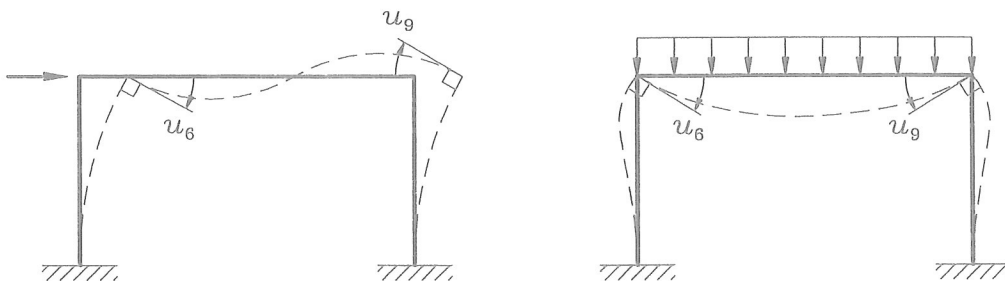
Det illustreres i det følgende for en indspændt ramme (som exs5 i CALFEM).

I den viste indspændte ramme er der stive forbindelser mellem elementerne i ramme-hjørnerne C og D. Det betyder, at vinklen mellem elementerne ① og ③ forbliver ret i C, idet de får samme vinkeldrejning (u_6), når konstruktionen belastes. Tilsvarende får elementerne ② og ③ samme vinkeldrejning (u_9) i D.



Figur 4.12. Indspændt ramme med frihedsgraderne $u_1 - u_{12}$.

Nedenfor er konstruktionens deformationsfigur skitseret for to forskellige lasttilfælde, og vinkeldrejningerne u_6 og u_9 er vist.

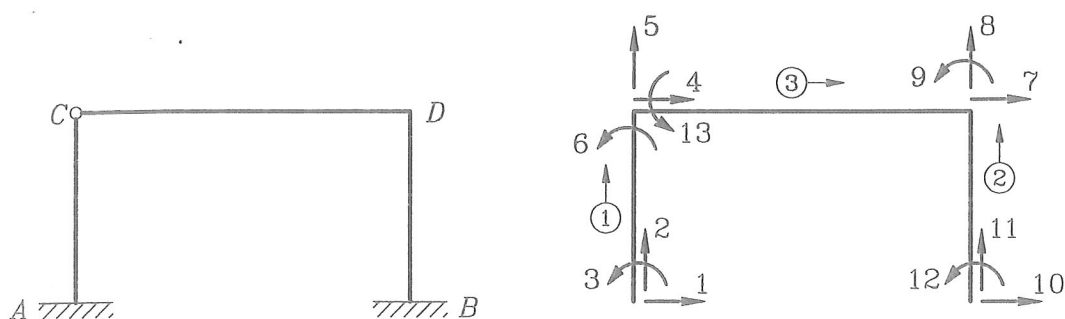


Figur 4.13. Deformeret ramme.

Hvis der indføres et charnier mellem to elementer i en knude, er bjælkeenderne ikke længere tvunget til at "følges ad" i rotationen. De kan nu dreje frit i forhold til hinanden. Derfor kan de ikke være "fælles" om rotationsfrihedsgraden. Der indføres derfor en ekstra rotationsfrihedsgrad, således at der bliver én for hver af de to elementer.

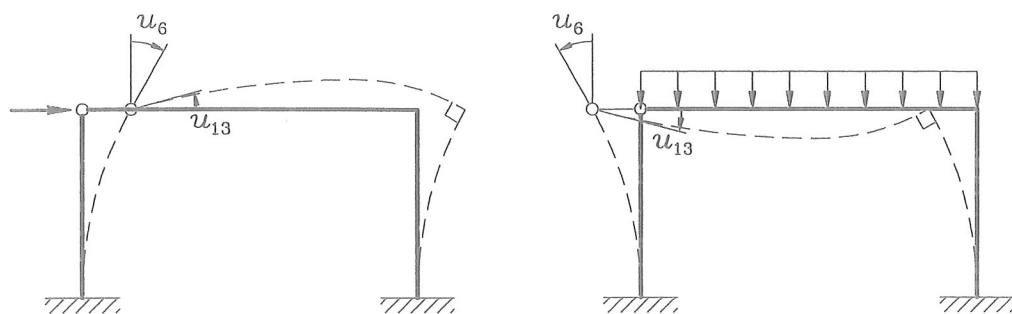
Hvis man f.eks. vælger at indlægge et charnier i punkt C i rammen i figur 4.12, tilføjes en rotationsfrihedsgrad u_{13} i C. Den tidligere fælles frihedsgrad u_6 tildeles det ene element, f.eks. element nr. ①, og den nye frihedsgrad, u_{13} , tildeles det andet element, element nr. ②, se figur 4.14 og 4.15.

Den nye frihedsgrad indsættes i topologimatricen E_{dof} som vist i exs5b side 54.



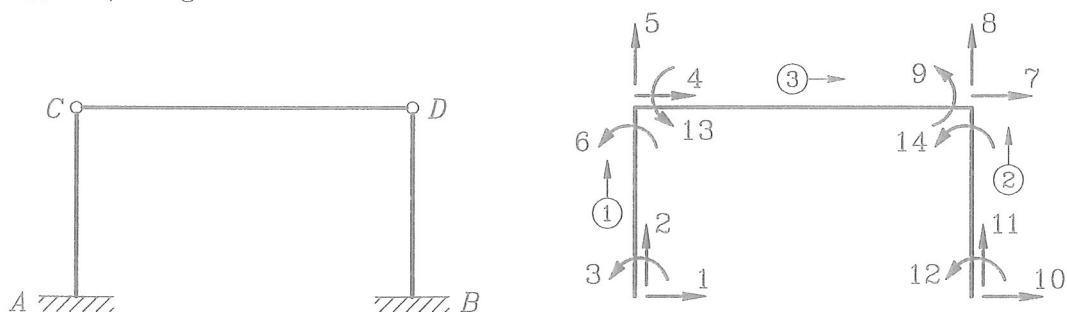
Figur 4.14. Ramme med charnier i C. Ekstra frihedsgrad u_{13} .

I figur 4.15 er deformationsfigurerne skitseret for konstruktionen i fig. 4.14.



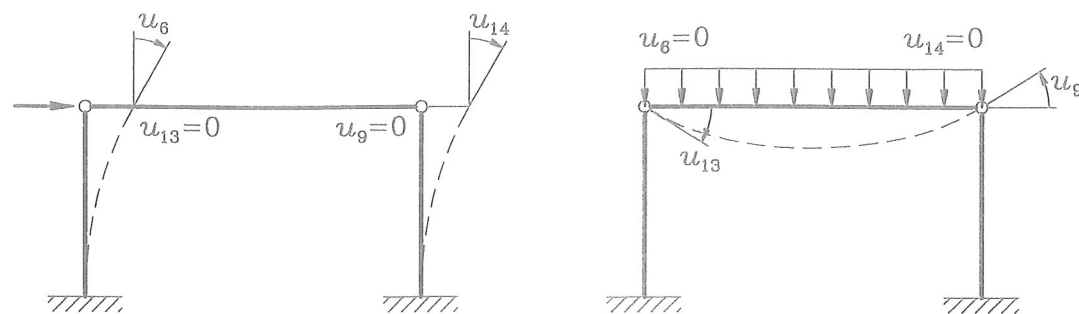
Figur 4.15. Deformeret ramme (charnier i C).

Hvis man også vælger at indlægge et charnier i D, tilføjes også en ekstra frihedsgrad u_{14} i D, se figur 4.16.



Figur 4.16. Ramme med charnier i C og D. Ekstra frihedsgrad u_{14} .

I figur 4.17 er deformationsfiguren for konstruktionen i figur 4.16 skitseret.



Figur 4.17. Deformeret ramme (charnier i C og D).

4.7 Indførelse af charnierer i exs5 i CALFEM

I det følgende er med udgangspunkt i exs5 i CALFEM vist, hvordan ændrede statiske systemer vil betyde ændrede deformationsfigurer. Snitkraftkurverne vil også ændres, men det er ikke vist. I alle 4 tilfælde er eneste påvirkning en vandret last i øverste venstre hjørne. (Den lodrette last i exs5 er ikke medtaget.)

Exs5a Som exs5 (dog kun vandret last jfr. ovenfor).

Exs5b Der indføres charnier i øverste venstre hjørne.

Exs5c Der indføres også charnier i øverste højre hjørne.

```

% example exs5a
% Som exs5 i Calfem. Dog kun vandret last.
%-----
% Formål
% Optegning af deformeret ramme, som påvirkes af vandret kraft
% i øverste venstre hjørne.
%-----
% Reference
% Lambert mortensen, 30.6.1999
%-----
echo on

%----- Topology -----

Edof=[1  1  2  3  4  5  6;
      2 10 11 12  7  8  9;
      3  4  5  6  7  8  9];

%----- Stiffness matrix K and load vector f -----

K=zeros(12); f=zeros(12,1); f(4)=1000;

%----- Element stiffness and element load matrices -----
Enheder m og N
I1=45.3e-4; A2=142.8e-4;
I2=2510e-8; I2=33090e-8;
E=2.1e11;

ep1=[E A1 I1]; ep3=[E A2 I2];
ex=[0 0;6 6;0 6];
ey=[0 4;0 4;4 4];

Ke1=beam2e(ex(1,:),ey(1,:),ep1);
Ke2=beam2e(ex(2,:),ey(2,:),ep1);
Ke3=beam2e(ex(3,:),ey(3,:),ep3);

%----- Assemble Ke into K -----

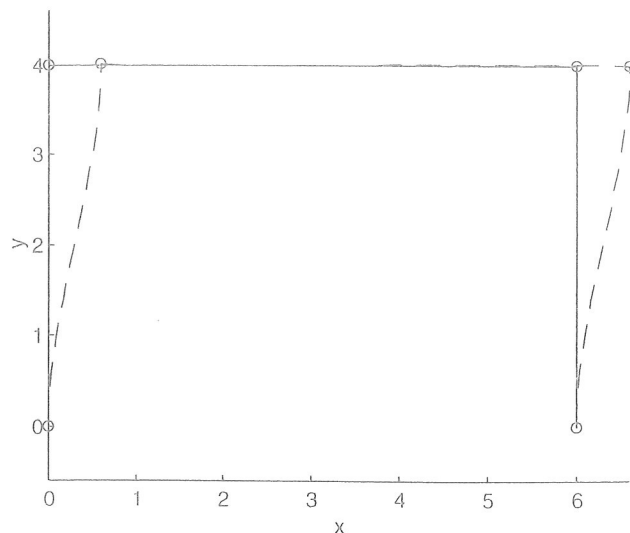
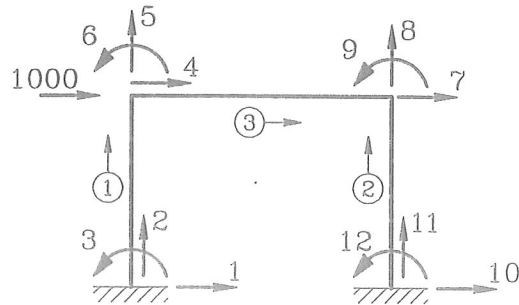
K=assem(Edof(1,:),K,Ke1);
K=assem(Edof(2,:),K,Ke2);
K=assem(Edof(3,:),K,Ke3);

%----- Solve the system of equations
% and compute reactions -----

bc=[1 0;2 0;3 0;10 0;11 0;12 0];
a=solveq(K,f,bc);

%----- Section forces -----
% Den udeformerede og defomerede
% ramme optegnes
Ed=extract(Edof,a);
Eldraw2(ex,ey)
Eldisp2(ex,ey,Ed)
%----- end -----
echo off

```



```

% example exs5b.
%Revideret udgave af exs5, idet rammen gives charnier i øverste venstre hjørne.
%Det betyder, at der skal indlægges en ekstra frihedsgrade (13 ).
%-----
Formål
% Optegning af deformeret ramme, som påvirkes af vandret kraft
% i øverste venstre hjørne.

%-----

% Reference
% Lambert Mortensen, 30.6.1999
%-----
echo on

%----- Topology -----

Edof=[1 1 2 3 4 5 6;
      2 10 11 12 7 8 9;
      3 4 5 13 7 8 9]; % Frihedsgrad no. 13 i element no.3

%----- Stiffness matrix K and load vector f -----

K=zeros(13); f=zeros(13,1); f(4)=1000; % Ændring af K og f

%----- Element stiffness and element load matrices -----
. Enheder m og N
A1=45.3e-4; A2=142.8e-4;
I1=2510e-8; I2=33090e-8;
E=2.1e11;

ep1=[E A1 I1]; ep3=[E A2 I2];
ex=[0 0;6 6;0 6];
ey=[0 4;0 4;4 4];

Ke1=beam2e(ex(1,:),ey(1,:),ep1);
Ke2=beam2e(ex(2,:),ey(2,:),ep1);
Ke3=beam2e(ex(3,:),ey(3,:),ep3);

%----- Assemble Ke into K -----

K=assem(Edof(1,:),K,Ke1);
K=assem(Edof(2,:),K,Ke2);
K=assem(Edof(3,:),K,Ke3);

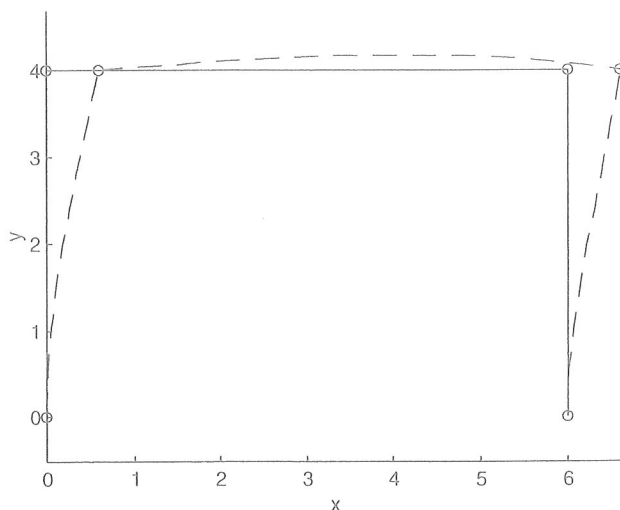
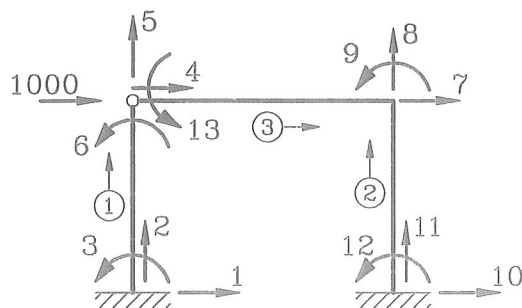
%----- Solve the system of equations
and compute reactions -----

bc=[1 0;2 0;3 0;10 0;11 0;12 0];
a=solveq(K,f,bc);

%----- Section forces -----
%Den udeformerede og deformerede
%ramme optegnes
Ed=extract(Edof,a);
Eldraw2(ex,ey)
Eldisp2(ex,ey,Ed)

%----- end -----
echo off

```



```
% example exs5c.
%Revideret udgave af exs5, idet rammen gives charnier i begge hjørner.
%Det betyder, at der skal indlægges to ekstra frihedsgrader (13 og 14)
```

```
-----
% Formål
```

```
% Optegning af deformeret ramme, som påvirkes af vandret kraft
% i øverste venstre hjørne.
```

```
-----
% Reference
```

```
% Lambert Mortensen, 30.6.1999
%-----
```

```
echo on
```

```
%----- Topology -----
```

```
Edof=[1 1 2 3 4 5 6;
      2 10 11 12 7 8 9;
      3 4 5 13 7 8 14];%Frihedsgrad 13 og 14 i element 3
```

```
%----- Stiffness matrix K and load vector f -----
```

```
K=zeros(14); f=zeros(14,1); f(4)=1000;
```

```
---- Element stiffness and element load matrices -----
```

```
% Enheder m og N
```

```
A1=45.3e-4; A2=142.8e-4;
I1=2510e-8; I2=33090e-8;
E=2.1e11;
```

```
ep1=[E A1 I1]; ep3=[E A2 I2];
ex=[0 0;6 6;0 6];
ey=[0 4;0 4;4 4];
```

```
Ke1=beam2e(ex(1,:),ey(1,:),ep1);
Ke2=beam2e(ex(2,:),ey(2,:),ep1);
Ke3=beam2e(ex(3,:),ey(3,:),ep3);
```

```
%----- Assemble Ke into K -----
```

```
K=assem(Edof(1,:),K,Ke1);
K=assem(Edof(2,:),K,Ke2);
K=assem(Edof(3,:),K,Ke3);
```

```
%----- Solve the system of equations
and compute reactions -----
```

```
bc=[1 0;2 0;3 0;10 0;11 0;12 0];
```

```
a=solveq(K,f,bc);
```

```
%Den udeformerede og deformerede
```

```
%ramme optegnes
```

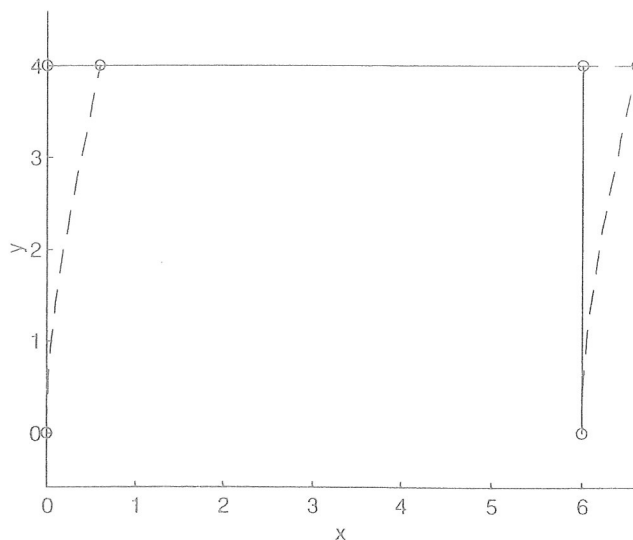
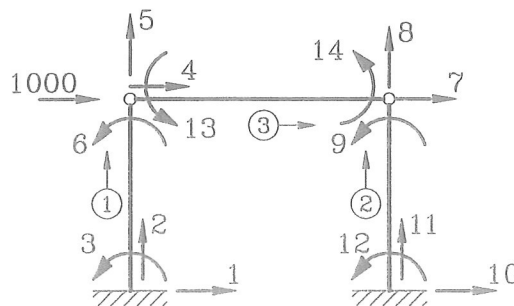
```
Ed=extract(Edof,a);
```

```
Eldraw2(ex,ey)
```

```
Eldisp2(ex,ey,Ed)
```

```
%----- end -----
```

```
echo off
```



1672 73.25

150102